Goldbach' Conjecture (9): Proved Hardy-Littlewood Conjecture (A)

Tong Xin Ping

Abstract: We have inclusion-exclusion formula of π(N) and inclusion-exclusion formula of r_2(N). Make use of inclusion-exclusion formula, we can obtain Hardy-Littlewood Conjecture (A).

“1+1”浅见之九(修正稿)：证明哈代－李特伍德猜想

童 信 平

关键词　哥德巴赫猜想(A)　答案数量　容斥公式　哈代－李特伍德猜想(A)

摘要　本文根据素数个数的容斥公式和哥德巴赫猜想(A)的答案数量的容斥公式，证明哈代－李特伍德猜想(A)。

1　名词、术语、符号、引理。

N——偶数中的复合数。N= 4，6，8，10，……。

p_i、p_r、p_{r+1}——素数，$2\leqslant p_i\leqslant p_r<\sqrt{N}<p_{r+1}<N$。i =1, 2, ⋯, r 。r= π($\sqrt{N}$)。

［A］——数值 A 的整数部分。例如，[5. 96]=5。

当 A 是函数式时，把 A 展开成一个一个的数值，再取每一个数值的整数部分。如公式(1)。

引理 1　不大于N的素数个数π(N)的容斥公式可以用公式(1)计算。

(1)　$$\pi(N)=(r-1)+\Big[N\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}\Big]$$

证明　$$\pi(N)=(r-1)+\Big[N\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}\Big]=(r-1)+\Big[N\prod_{1\leqslant i\leqslant r}\Big(1-\frac{1}{p_i}\Big)\Big]$$

$$=(r-1)+\Big[N\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_3}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_r}\Big)\Big]$$

$$=(r-1)+\Big\{N-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\Big[\frac{N}{p_i}\Big]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\Big[\frac{N}{p_ip_j}\Big]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\Big[\frac{N}{p_ip_jp_k}\Big]+\ldots+(-1)^r\Big[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r}\Big]\Big\}$$ [1]

这最后一个等式就是素数个数π(N)的容斥公式[1]。证毕。

p——闭区间[p_r+1，N−p_r−1]内(以下简称闭区间)的素数。(p_r+ 1)＜p＜(N−p_r−1)。

π(N)$_r$——p 的数量，也就是闭区间内的素数数量。π(N)$_r$= π(N−p_r−1)－π(p_r+1)= π(N−p_r−1)−r。N→∞时，π(N)$_r$～π(N)。

根据以上规定，N=p_i+(N−p_i)=p+(N−p)=“1+1”，实验证明某些 N 的(N−p_i)都是合数。下面分别讨论(N−p_i)和(N−p)中的素数数量(两类“1+1”的解数)。

N(1,1)$_i$——(N− p_i)中的“1+1”的解数。

N(1,1)$_r$——(N, $p_1p_2\cdots p_r$)＝2 时，(N−p)中的“1+1”的解数[2]。(见公式(2)。)

N(1,1)$_R$——(N, $p_1p_2\cdots p_r$)≥2 时，(N−p)中的“1+1”的解数。

已经知道，$N(1,1)_R=N(1,1)_r\prod_{p|N}\frac{p-1}{p-2}$，

$3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}$

$r_2(N)$——“1+1”的答案数量(解数)。$r_2(N)=2N(1,1)_i+N(1,1)_R$。

$a_i+n\,p_i$，$a_{ij}+np_ip_j$，$a_{ijk}+np_ip_jp_k$，…，——$(N, p_1p_2\cdots p_r)=2$ 时，以 N 为末项、以 p_i、p_ip_j、$p_ip_jp_k$，…为公差的等差数列。

$\pi(p_i)_r$，$\pi(p_ip_j)_r$，$\pi(p_ip_jp_k)_r$，…，——闭区间内，以上的每一个等差数列中的素数个数。

<u>引理 2</u>　$(N, p_1p_2\cdots p_r)=2$ 时，闭区间内，“1+1”的解数$N(1,1)_r$可用公式(2)[2]计算。

(2)　$N(1,1)_r=\pi(N)_r-\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant r}\pi(p_i)_r+\sum\limits_{2\leqslant i<j\leqslant r}\pi(p_ip_j)_r-\sum\limits_{2\leqslant i<j<k\leqslant r}\pi(p_ip_jp_k)_r+\cdots+(-1)^{r-1}\pi(p_2p_3\ldots p_r)_r$[2]

<u>引理 3</u>(素数定理)　当$N\to\infty$时，$\pi(N)\sim\dfrac{N}{\ln N}$。

<u>引理 4</u>(等差数列的素数定理)　$(p_i,a_i)=1$ 时，末项不大于N的等差数列a_i+np_i中，当$N\to\infty$时，其素数个数$\pi(p_i)\sim\dfrac{N}{\varphi(p_i)\ln N}$。($\varphi(p_i)$是欧拉函数。$\varphi(p_i)=p_i-1$。$\varphi(p_ip_j)=(p_i-1)(p_j-1)$。)

根据引理 3，可以采用更精确的$\pi(p_i)\sim\dfrac{\pi(N)}{p_i-1}$。

<u>引理 5</u>　“1+1”解数$r_2(N)$可以用公式(3)计算。

(3)　$$r_2(N)\sim 2N(1,1)_i+\left[\pi(N)_r\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\right]\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

<u>证明</u>　首先，展开公式(3)。

$$r_2(N)\sim 2N(1,1)_i+\left[\pi(N)_r\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\right]\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim 2N(1,1)_i+\left\{\pi(N)_r-\sum_{2\leqslant i\leqslant r}\left[\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}\right]+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{\pi(N)_r}{(p_i-1)(p_j-1)}\right]-\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{\pi(N)_r}{(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)}\right]\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{r-1}\left[\frac{\pi(N)_r}{(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_r-1)}\right]\right\}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

其次，比较公式(2)和公式(3)。

$N\to\infty$时，$\pi(p_i)_r\sim\dfrac{\pi(N)_r}{p_i-1}\sim\left[\dfrac{\pi(N)_r}{p_i-1}\right]$，$\pi(p_ip_j)_r\sim\dfrac{\pi(N)_r}{(p_i-1)(p_j-1)}\sim\left[\dfrac{\pi(N)_r}{(p_i-1)(p_j-1)}\right]$，……。

由此可见，公式(3)~公式(2)，公式(3)成立。证毕。

根据能取整数者先计算的原则，我们可得到以下的计算结果。

$$\left[N\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\right]=\left[N\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p-1}\right]$$

$$=\left[N\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}2\frac{p-1}{p}\right]$$

$$=[2\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\ N\prod_{2\le p\le\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}]$$

$$=[2\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)[N\prod_{2\le p\le\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}]]$$

$$=[2\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)(\pi(N)-r+1)]$$

2　证明哈代—李特伍德猜想(A)。

定理 1　哈代－李特伍德猜想(A)成立。

证明　根据公式(3)得到下面的公式(4)。

$$(4)\quad r_2(N)\sim 2N(1,1)_i+[\pi(N)_r\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)]\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim 2N(1,1)_i+[\frac{\pi(N)_r}{N}\ N\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)]\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim 2N(1,1)_i+[\frac{\pi(N)_r}{N}\ [N\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)]\ ]\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim 2N(1,1)_i+[\frac{\pi(N)_r}{N}\ [2\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)(\pi(N)-r+1)]]\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim 2N(1,1)_i+[\frac{2\pi(N)_r(\pi(N)-r+1)}{N}\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)]\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

若考虑到 $N\to\infty$ 时，$\pi(N)\sim\pi(N)_r$，$\pi(N)\sim(\pi(N)-r+1)$。与此同时，$\pi(\sqrt{N})/\pi(N)\to 0$，$(r-1)$和$(N-p_i)$中的素数数量(即 $N(1,1)_i$)可以忽略不计，故可以得到比较简单的公式(5)。

$$(5)\quad r_2(N)\sim\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\le p\le\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim 1.3202\frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim 1.3202\frac{N}{\ln N\ln N}\prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

公式(5)中最后一个表达式就是哈代－李特伍德猜想(A)。证毕。

3　讨论。

我们证明了哈代－李特伍德猜想(A)。它证明了哥德巴赫猜想(A)不但成立，而且，还可以精确地计算哥德巴赫猜想(A)的答案的数量。

$\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}$虽然比$\frac{2\pi(N)_r(\pi(N)-r+1)}{N}$简单，但数值却略大一些，实验显示，$N=10^{12}$时，前者的计算精确度达到 1. 000883，这说明采用前者既简单又保证了精确度，这是可取的。

参考文献

[1] 王元，谈谈素数，上海教育出版社，1978 年，32 页。

[2] 童信平，偶数 Goldbach 问题解数的计算公式，右江民族师专学报(自然科学版) ,1997,3,10-12。

2010-08-30。