Goldbach' Conjecture (8): Upper Bound Estimation of Number of Goldbach' Primes

Tong Xin Ping

Abstract: This upper bound estimation prevailed over upper bound estimation of Chen Jing Run.

"1+1"浅见之八：哥德巴赫素数的数量的上界估计

童 信 平

关键词　哥德巴赫猜想(A)　答案数量　上界估计

摘要　本文得到了哥德巴赫猜想(A)的答案数量的上界估计，在实验范围内可以看到，这个上界估计相对于陈景润等人得到的上界估计是一个大跃进。

1　名词、术语、符号、引理。

N——偶数中的复合数。N= 4，6，8，10，……。

p_i、p_r、p_{r+1}——素数，$2\leqslant p_i\leqslant p_r<\sqrt{N}<p_{r+1}<N$ 。i =1, 2, …, r 。r=π（$\sqrt{N}$）。

(1)　$w_r=p_1p_2p_3\cdots p_r$。

w_r表示的是不大于w_r的正整数的数量。

<u>引理 1</u>[1]　若r⩾4，则$N<p^2_{r+1}<p_1p_2\cdots p_r=w_r$。

H——不大于w_r的素因子皆大于p_r的合数。例如，p^2_{r+1}、$p_{r+1}p_{r+2}$、…。

引理 1 肯定了 H 的存在。$N<H\leqslant p^2_{r+1}<p_{r+1}p_{r+2}$、<…<$w_r$。

H_n——合数 H 的数量。

(2)　$u=(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\cdots(p_r-1)=\varphi(w_r)$ 。

u 表示的是w_r的欧拉函数,是剔除了含有素因子$p_1\sim p_r$的合数后与w_r互素的正整数的数量。它包括数 1、大于p_r但小于w_r的素数数量、合数 H 的数量H_n。

$u=1+(\pi(w_r)-r)+H_n$。根据引理 1，r＜4 时，$H_n=0$; r⩾4 时，$H_n>0$。

(3)　$$v=(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)(p_4-2)\cdots(p_r-2)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

p——闭区间$[p_r+1，N-p_r-1]$内(以下简称闭区间)的素数。$(p_r+1)<p<(N-p_r-1)$。

P——区间$(N，w_r)$内的素数。

$\pi(w_r)_B$——$(N-p)$中的素数数量与$|N-P|$中的素数数量之和。

B——$|N-H|$中的素数数量。

v 表示的是 u 中剔除了满足$N\equiv p(\mathrm{mod}\ p_i)$、$N\equiv P(\mathrm{mod}\ p_i)$、$N\equiv H(\mathrm{mod}\ p_i)$的素数后剩下的素数的数量。也就是素数$(N-p)$、素数$|N-P|$、素数$|N-H|$等数量之和。$v=\pi(w_r)_B+B$。

2　素数个数的上界估计。

素数个数π(N)的计算已经有了精确无误的容斥公式和精确度随着 N 的增大而趋近于 1 的、非常简单好用的渐近公式$\pi(N)\sim\dfrac{N}{\ln N}$，讨论它的上界估计已经意义不大，这里的讨论是为了把这种方法推广到哥德巴赫素数的数量的研究中去做一些准备。

我们在上一篇指出，$\pi(N)=\varepsilon N\frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_r-1)}{p_1p_2p_3\ldots p_r}$。

这里讨论 ε。如果 $\varepsilon>1$，忽略 ε 得到下界估计；如果 $\varepsilon<1$，忽略 ε 得到上界估计。

前面指出，$r\geqslant 4$ 时，存在素因子皆大于 p_r 的合数 H，使得 $u=1+(\pi(w_r)-r)+H_n$，忽略$(1-r)$后，(在实验验证时再讨论。) $\pi(w_r)<u$。可知 $\frac{\pi(w_r)}{w_r}<\frac{u}{w_r}$。如果再忽略 $\frac{\pi(N)}{N}$ 与 $\frac{\pi(w_r)}{w_r}$ 的差别时，(在实验验证时再讨论。)我们可得到公式(4)。

$$(4)\quad \pi(N)<N\frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_r-1)}{p_1p_2p_3\ldots p_r}$$

公式(4)是素数个数的上界估计。这就是说，$\varepsilon<1$。

3　哥德巴赫素数的数量的上界估计。

$r_2(N)$——哥德巴赫素数的数量。也就是常说的哥德巴赫猜想的答案的数量(解数)。

我们在上一篇指出，$r_2(N)=\psi N\frac{(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\ldots(p_r-2)}{p_1p_2p_3\ldots p_r}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$。

这里讨论 ψ，如果 $\psi>1$，忽略 ψ 得到下界估计；如果 $\psi<1$，忽略 ψ 得到上界估计。

前面指出，$r\geqslant 4$ 时，存在素因子皆大于 p_r 的合数 H，H 的存在使得 $v=(N-p)$中素数的数量+|N−P|中素数的数量+|N−H|中素数的数量$=\pi(w_r)_B+B$。

因为(N−p)=素数时，它说的是 N=素数+p，也就是哥德巴赫猜想(A)。

因为|N−P|=素数时，它说的是(素数+N)=P，也就是双生素数(p，p+N)的问题。

这二个问题都没有解决，$\pi(w_r)_B$ 无法计算。但是，本文承认的是 $\pi(w_r)_B$ 这样一种客观存在，即使 $\pi(w_r)_B=0$，也不会影响到下面的判断。

|N−H|=素数时，它说的是 N=H(合数)−素数。——“N 表为一个合数与一个素数之差。”这一个问题也是无有文字证明材料的。

但是，我们已经充分地研究了“N 表为一个合数与一个素数之和”。而且，已经细化到：“N=素数+2 个素数的乘积”，（即“1+2”。）“N=素数+3 个素数的乘积”，（即“1+3”。）“N=素数+4 个素数的乘积”，（即“1+4”。）.......。

潘承洞院士说过:“关于偶数哥德巴赫猜想的每一个结果都可相应地推广到孪生素数上去。”目前，他说的“关于偶数哥德巴赫猜想的每一个结果”只不过是“1+2”、“1+3”、“1+4”等而已，所以，这句话的更具体的解释是可以把“N 表为一个合数与一个素数之和”的每一个结果都可相应地推广到“N 表为一个合数与一个素数之差”上去。换句话说，因为“1+2”、“1+3”、“1+4”等成立，所以，当 N 足够大时，含有“2”、“3”、“4”个素因子的 H 必定存在，而且，还存在|N−2 个素数乘积|=素数、|N−3 个素数乘积|=素数、|N−4 个素数乘积|=素数、…。由此可见，$B>0$ 的现象是必然的了。前面指出，$v=\pi(w_r)_B+B$，故必定有 $\pi(w_r)_B<v$。

很明显，$\frac{\pi(w_r)_B}{w_r}<\frac{v}{w_r}$，即使 $\frac{r_2(N)}{N}\sim 0<\frac{v}{w_r}$，可得到公式(5)。

$$(5)\quad r_2(N)<N\frac{(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\ldots(p_r-2)}{p_1p_2p_3\ldots p_r}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

公式(5)是哥德巴赫素数的数量的一种上界估计。(下界估计与上界估计是可以分别讨论的。)这就是说，$\psi<1$。

4　实验验证和比较。

公式(5)是哥德巴赫猜想的答案数量(解数)的上界估计。大家知道，陈景润在证明“1+2”

后，也得到过这种上界估计，如公式 (6) 所示。

$$(6)\quad r_2(N) < 7.8342 \prod_{3\leq p\leq\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N\\3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2} \frac{N}{\ln N \ln N}$$

上界估计一直是数学家角逐的一个项目，角逐是从系数值 16 开始的，到了王元他们，王元他得到的系数值是 8，潘承洞他得到的系数值是 7.928，陈景润他得到的系数值是 7.8342。而哈代－李特伍德猜想告诉我们，这个系数值要略大于 2(精确度略大于 1。)才是最优秀的、才可得到广泛的认可，陈景润他虽然是艰难跋涉中的佼佼者，但离目标值还是有很大的距离。

公式(5)是不是比公式(6)更好呢？让我们做一个实验，并用精确度(=计算值/实际值)进行对比，从表 1 可以看出公式(5)相对于 8→7.928→7.8342 地跋涉，堪称是一种大跃进。

表 1　二种上界估计的计算值及其精确度(=计算值/实际值)比较

N	r_2(N)实际值	式 (5) 计算值	式 (5) 精确度	式 (6) 计算值	式 (6) 精确度
128	6	7.48	1.2468	28.83	4.805
256	16	12.66	0.9043	43.83	2.7394
512	22	19.99	0.9086	68.78	3.1264
1024	4	31.79	0.8366	110.93	2.5211
2048	50	54.55	1.2398	183.01	3.6602
4096	106	93.92	0.9783	307.10	2.8972
8192	152	160.17	1.0522	522.82	3.4396
16384	302	280.55	0.9488	901.01	2.9835
32768	488	487.30	0.9986	1569.03	3.2152
65536	870	871.99	1.0319	2757.36	3.1649
131072	1498	1547.94	1.0410	4884.04	3.2604
262144	2628	2758.10	1.0624	8711.75	3.3150
524288	4732	4985.75	1.0590	15636.40	3.3030
1048576	8478	9005.51	1.0675	28222.00	3.3289
2097152	14942	16399.22	1.1002	51196.30	3.4263
19999996	105831	117393.83	1.1093	365960.86	3.4580
24999998	129574	142948.61	1.1032	445544.78	3.4385
100000094	437445	489314.93	1.1186	1524029.6	3.4839

前面指出，r≥4 时，$H_n>0$，B＞0。实验结果却是从 N=65536、r⩾54 开始的。这是因为我们假设 $\frac{\pi(N)}{N} \sim \frac{\pi(w_r)}{w_r}$ 等原因造成的。实际上 $\frac{\pi(w_r)}{w_r} < \frac{\pi(N)}{N}$，这就要求有足够数量的 H_n 和 B，(只能是增大 N。)才能满足公式(4)和(5)。其他如忽略了(1− r)等，也产生这样的影响。

5　讨论。

公式(4)从中、小偶数出发并适合于大偶数。(实验略。)

公式(5)引用了“1+2”、“1+3”、“1+4”等，实验也应该在大偶数中进行，表 1 跨越了概念的界限，是不容许的。其实，大偶数中的素数和合数是现代计算机写不出来的，根本无法进行实验，所以，大偶数只能是纸上谈兵，数学家也都是不得不用小偶数举例子的。

根据哈代－李特伍德猜想 (A)，公式(6)的精确度的极限值是 3.9671。公式(5)的精确度的极限值是不大于 1.3，它还是比 3.9671 好多了，这将在后面的文章中进行讨论。

参考文献

[1]　王志雄，余新河数学题与哥德巴赫猜想，科学技术文献出版社，1995 年，51 页。

2010-08-20