Goldbach' Conjecture (7): Five proofs that is under five assumptions term

Tong Xin Ping

Abstract: According to five assumptions, get five proofs

“1+1”浅见之七(修正稿)：五个假设性的证明

童 信 平

潘承洞院士说过：“哥德巴赫猜想甚至没有一个假设性的证明。”[1]本文通过五个假设，得到五个假设性的证明，进一步认识哥德巴赫猜想(A)和哈代－李特伍德猜想(A)。

1　素数个数的假设性的证明。

已经知道，$\pi(N) \neq N \prod \frac{p-1}{p}$ （$2 \leqslant p \leqslant \sqrt{N}$），但是，可以取 ε 使得公式(1)成立。

(1)
$$\pi(N) = \varepsilon N \prod_{2 \leqslant p \leqslant \sqrt{N}} \frac{p-1}{p}$$

$$= \varepsilon N \frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_r-1)}{p_1 p_2 p_3 \ldots p_r}$$

$$= \varepsilon N \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{10}{11}\frac{12}{13}\cdots\frac{p_r-1}{p_r}$$

$$= \varepsilon \frac{4}{3}\frac{6}{5}\frac{10}{7}\frac{12}{11}\frac{16}{13}\cdots\frac{N}{p_r}$$

因为 $\frac{4}{3}\frac{6}{5}\frac{10}{7}\frac{12}{11}\frac{16}{13}$ 中每一个分数式之值大于 1。

第一个假设：假设 $\varepsilon \frac{4}{3}\frac{6}{5}\frac{10}{7}\frac{12}{11}\frac{16}{13} > 1$，我们得到下面的下界估计。

(1a)
$$\pi(N) > \frac{N}{p_r}$$

$\pi(N)$已经有精确的容斥公式和精确度趋近于 1 的渐近公式 $\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N}$，所以，公式(1a)的假设性的下界估计的意义不大。但是，这个方法可以推广到哥德巴赫素数的数量的研究中去。

2　哥德巴赫素数的数量的假设性的证明(一)。

已经知道，$r_2(N) \neq \pi(N) \prod_{3 \leqslant p \leqslant \sqrt{N}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{\substack{p \mid N \\ 3 \leqslant p \leqslant \sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$。但是，可以取 λ 使得公式(2)成立。

其中，$(N, p_1p_2p_3\cdots p_r) = 2$ 时，$\prod \frac{p-1}{p-2} = 1$。$(N, p_1p_2p_3\cdots p_r) > 2$ 时，$\prod \frac{p-1}{p-2} > 1$。

(2) $r_2(N) = \lambda\ \pi(N) \prod_{3\leq p\leq\sqrt{N}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$

$$= \lambda\ \pi(N) \frac{(p_2-2)(p_3-2)\ldots(p_r-2)}{(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_r-1)} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$= \lambda\ \pi(N) \frac{3-2}{3-1}\frac{5-2}{5-1}\frac{7-2}{7-1}\frac{11-2}{11-1}\cdots\frac{p_r-2}{p_r-1} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$= \lambda \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{9}{6}\frac{11}{10}\cdots\frac{p_r-2}{p_{r-1}-1}\frac{\pi(N)}{p_r-1} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

因为 $\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{9}{6}\frac{11}{10}\cdots\frac{p_r-2}{p_{r-1}-1}$ 中每一个分数式之值大于 1。

第二个假设：假设 $\lambda \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{9}{6}\frac{11}{10}\cdots\frac{p_r-2}{p_{r-1}-1}>1$。我们得到下面的下界估计。

(2a) $r_2(N) > \frac{\pi(N)}{p_r-1} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$

3 哥德巴赫素数的数量的假设性的证明(二)。

已经知道，$r_2(N) \neq \frac{N}{2} \prod_{3\leq p\leq\sqrt{N}} \frac{p-2}{p} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$。但是，可以取 ψ 使得公式(3)成立。

(3) $r_2(N) = \psi \frac{N}{2} \prod_{3\leq p\leq\sqrt{N}} \frac{p-2}{p} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$。

$$= \psi\, N \frac{(p_1-1)(p_2-2)(p_3-2)\ldots(p_r-2)}{p_1 p_2 p_3\ldots p_r} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$= \psi \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{5}{7}\frac{9}{11}\frac{11}{13}\cdots\frac{p_{r-1}-2}{p_{r-1}}\frac{p_r-2}{p_r} N \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$= \psi \frac{3}{2}\frac{5}{3}\frac{9}{5}\frac{11}{7}\cdots\frac{p_r-2}{p_{r-2}}\frac{N}{p_{r-1}p_r} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leq p\leq\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$\scriptstyle p|N,\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}$$

因为$\frac{3}{2}\frac{5}{3}\frac{9}{5}\frac{11}{7}\cdots\frac{p_r-2}{p_{r-2}}$中每一个分数式之值大于1。

第三个假设：假设$\psi\frac{3}{2}\frac{5}{3}\frac{9}{5}\frac{11}{7}\cdots\frac{p_r-2}{p_{r-2}}>1$。我们得到下面的下界估计。

$$\text{(3a)}\quad r_2(N)>\frac{N}{p_{r-1}p_r}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

从计算结果看，公式(3a)＜公式(2a)，这是因为$\frac{3}{2}\frac{5}{3}\frac{9}{5}\frac{11}{7}\cdots>\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{9}{6}\frac{11}{10}\cdots$。舍去的多，得到的下界估计就小，没有矛盾。

4　哈代—李特伍德猜想(A)的假设性的证明(一)。

根据公式(1)、(2)，我们有

$$\text{(4)}\quad r_2(N)=\lambda\,\pi(N)\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}\times\Big(\pi(N)/\,\varepsilon N\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}\Big)$$

$$=\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{2N}{\ln^2N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

第四个假设：假设$\frac{\lambda}{\varepsilon}\sim 1$，我们得到下面的近似估计公式。

$$\text{(4a)}\quad r_2(N)\sim\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim\frac{2N}{\ln^2N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

我们得到了哈代－李特伍德猜想(A)的假设性的证明。

5　哈代—李特伍德猜想(A)的假设性的证明(二)。

根据公式(1)、(3)，我们有

$$\text{(5)}\quad r_2(N)=\psi\frac{N}{2}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}\text{。}$$

$$=\psi\frac{N}{2}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p}\Big(\pi(N)/\,\varepsilon N\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}\Big)^2\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}\text{。}$$

$$= \frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon} \frac{2\pi(N)\pi(N)}{N} \prod_{3\le p\le\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim \frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon} \frac{2N}{\ln^2 N} \prod_{3\le p\le\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

根据公式(4)与(5)，$\frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}$，$\psi = \lambda\varepsilon$，这是本文的核心，以后作进一步的讨论。

第五个假设：假设$\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon} \sim 1$，我们得到下面的近似估计公式。

$$\text{(5a)}\quad r_2(N) \sim \frac{2\pi(N)\pi(N)}{N} \prod_{3\le p\le\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$\sim \frac{2N}{\ln^2 N} \prod_{3\le p\le\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N\\3\le p\le\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

我们又得到了哈代－李特伍德猜想(A)的假设性的证明。

6 讨论。

通过以上假设，我们得到了二个协调一致的哥德巴赫素数的数量的假设性的下界估计。实践显示，这些下界估计是偏低的。

我们也得到了哈代－李特伍德猜想(A)的假设性的证明。实验显示，$N\to\infty$，$\frac{\lambda}{\varepsilon}\to 1$，$\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}\to 1$。目前要证明这一点还比较困难。

在得到假设性的证明之后，能不能不用假设而用其他方法进行论证呢？另行讨论。

参考文献

[1] 张建亚，哥德巴赫猜想与潘承洞，中华读书报，2003，01，15。

2010-08-20