The Sieve Method of the Number of Solutions of Goldbach Conjecture (A)

Tong Xin Ping (txp1313abc@hotmail.com)

Abstract: We can find all solutions of Goldbach conjecture (A) ling in the closed interval [pr+1, N-pr-1], and we can obtain expression of the number of solutions of Goldbach conjecture (A).

偶数 Goldbach 问题解数的计算公式(筛法公式)

童 信 平 (txp1313abc@hotmail.com)

摘要 本文用小学生也知道的“植树问题”得到闭区间内偶数 Goldbach 问题的全部答案。同时，建立了计算这些答案数量的筛法公式。

关键词 偶数 Goldbach 问题 答案 筛法公式

0 前言。

在长度为偶数 N 的数轴上，若要找到不大于 N 的全部素数或者闭区间[p_r+1, N− p_r−1](以下简称闭区间)内的偶数哥德巴赫猜想(简称“1+1”)的全部答案，可以用二个“植树问题”(这里是“砍树”即划去间隔相等的正整数。)来解决:

①在数轴上找到小于$\sqrt{N}$的每一个素数 p_i，从小到大并从每一个素数 p_i 处开始，划去间隔为 p_i 的正整数(合数 np_i，$n\geqslant 2$。)，剩下的正整数就是数 1 和不大于 N 的全部素数。这些素数的数量 π(N)可以用逐步淘汰法计算而得到筛法公式[1]，又称为容斥公式。

②再从(N−p_i)处开始，反方向划去间隔为 p_i 的正整数(当 p_i 能整除 N 时，闭区间内划去的是合数；当 p_i 不能整除 N 时，闭区间内划去的是以 N 为末项、p_i 为公差的等差数列 a_i+n p_i 中的素数或合数。) 闭区间内剩下的素数就是闭区间内的“1+1”的全部答案。

以 N 为末项、p_i 为公差的等差数列中的素数是一种客观存在，(例如，当 N→∞时，等差数列 a_i+n p_i 中的素数个数可以按等差数列的素数定理进行近似估计。)本文运用这种客观存在，用逐步淘汰法建立闭区间内“1+1”答案数量(又称表法个数、解数。)的筛法公式。

1 原理、定义、符号。

N——偶数。

p_i、p_r、p_{r+1}——素数。$p_i<\sqrt{N}$，i =1, 2, …, r 。r=π($\sqrt{N}$)。

p——闭区间[p_r+1, N− p_r−1]内的素数。必有(N−p)>p_r。p 的数量是 $\pi(N)_r=\pi(N-p_r-1)-r$。

$a_i+n\,p_i$，$a_{ij}+np_ip_j$，$a_{ijk}+np_ip_jp_k$，…，——以 N 为末项、以 p_i、p_ip_j、$p_ip_jp_k$，…为公差的等差数列。其中，$(N, p_i)=1$，$(N, p_ip_j)=1$，$(N, p_ip_jp_k)=1$，…。

$\pi(p_i)_r$，$\pi(p_ip_j)_r$，$\pi(p_ip_jp_k)_r$，…，——闭区间内，以上的每一个等差数列中的素数个数。

h——p_i 不能整除 N 时，p_i 的个数。

根据以上规定，我们有 $N=p_i+(N-p_i)=p+(N-p)$。

$N(p,p)_i$——$(N-p_i)$中的素数个数。即闭区间[0，p_r+1]和[N− p_r−1，N]内的“1+1”的解数。

N→∞时，p_i 的数量可以忽略不计，故 $N(p,p)_i$ 也可以忽略不计，而且，有许多 N 的$(N-p_i)$都是合数，即 $N(p,p)_i\geqslant 0$。一般地讲，证明“1+1”就是要证明(N−p)中必有素数(定性分析)或计算出这些素数的数量(定量分析)。

$N(p,p)_r$——(N−p)中的素数个数。也就是闭区间[p_r+1, N− p_r−1]内的“1+1”的解数。

$r_2(N)(=D(N))$——“1+1”的解数。$r_2(N)=N(p,p)_r+2N(p,p)_i\geqslant N(p,p)_r$。

2 引理和定理。

引理 1　$a_i + n\,p_i$在闭区间内的素数，皆不会是偶数Goldbach问题的解。
证明　$a_i + n\,p_i$以N为末项，即$N=a_i+n''\,p_i$。若p是$a_i+n\,p_i$在闭区间的素数，即$p=a_i+n'\,p_i$。$N-p=(a_i+n''\,p_i)-(a_i+n'\,p_i)=(n''-n')\,p_i$，这是一个含有素因子$p_i$的合数。(若$(n''-n')=1$，则p在闭区间之外，不属于本文的讨论范围。)即N可表为一个素数p及一个含有素因子p_i的合数之和，故$a_i+n\,p_i$在闭区间内的素数(数量是$\pi(p_i)_r$)，皆不会是偶数Goldbach问题的解。证毕。
引理 2　$a_{ij}+np_ip_j$在闭区间内的素数重复的是$a_i + n\,p_i$与$a_j+ n\,p_j$中的共有的素数。

$a_{ijk}+np_ip_jp_k$，$a_{ijkl}+np_ip_jp_{kl}$，…，在闭区间内的素数可以此类推。

证明　若$p=a_{ij}+n'\,p_ip_j=(a_i+ep_i)+n'\,p_ip_j=a_i+(e+n'\,p_j)p_i$，它是$a_i + n\,p_i$中的素数。$(e\geqslant 0$。)

又 $p=a_{ij}+n'\,p_ip_j=(a_j+dp_j)+n'\,p_ip_j=a_j+(d+n'\,p_i)p_j$，它是 $a_j+ n\,p_j$ 中的素数。$(d\geqslant 0$。)

由此可见，$a_{ij}+np_ip_j$ 中的素数重复的是 a_i+np_i 与 a_j+np_j 中共有的素数。共$\pi(p_ip_j)_r$个。

$a_{ijk}+np_ip_jp_k$，$a_{ijkl}+np_ip_jp_{kl}$，…，在闭区间内的素数可以此类推。证毕。

定理 1　在闭区间$[p_r+1, N-p_r-1]$内，偶数 Goldbach 问题的解数 $N(p,p)_r$ 可按公式(1)计算。

(1)　$N(p,p)_r=\pi(N)_r-\Sigma\,\pi(p_i)_r+\Sigma\,\pi(p_ip_j)_r-\Sigma\,\pi(p_ip_jp_k)_r+\cdots+(-1)^h\,\pi(p_ip_j\cdots p_k)_r$

证明　由引理 1 可知，$a_i + n\,p_i$ 在闭区间内的素数不能构成偶数 Goldbach 问题的解，应该从$\pi(N)_r$中减去，合计后是$\Sigma\,\pi(p_i)_r$。由引理 2 可知，在减去$\Sigma\,\pi(p_i)_r$和$\Sigma\,\pi(p_j)_r$时，因为出现重复减去而要补加$\pi(p_ip_j)_r$，合计后是$\Sigma\,\pi(p_ip_j)_r$。同理，对于$\pi(p_ip_jp_k)_r$应该是补减，合计后是$\Sigma\,\pi(p_ip_jp_k)_r$。…以此类推，得到公式(1)。证毕。

这里的 $N(p,p)_r$ 的计算方法可以推广到双生素数$(p,p+N)$的数量计算上去[2]。

3　讨论。

素数个数(包括等差数列中的素数个数)的研究分为素数个数无限多、筛法、筛法公式(容斥公式)、渐近公式(素数定理)等 4 个问题来进行，如今这些问题可以用不同的初等方法来解决。

本文用小学生也知道的“植树问题”得到闭区间内的偶数 Goldbach 问题的全部答案以及计算这些答案数量的筛法公式(1)。只是计算起来很繁琐。

剩下的二个问题。——“1+1”解数无限多、“1+1”解数的渐近公式(哈代－李特伍德猜想(A))。——能不能用初等方法解决？笔者将另行讨论。

参考文献

[1] 王元，谈谈素数，上海教育出版社，1978 年，32 页。
[2] 黄勇、童信平，双生素数(P,P+N)的数量的计算公式，广西民族学院学报(自然科学版)，2001，1，9－11。

后记

本文原名《Goidbach 问题解数和孪生素数数量的计算方法(伪因子法)》，经由潘承彪、陆鸣皋、朱尧辰、贾朝华、王炜、张文鹏组成的筹备组评审通过，在 1995 年王元创导的西安全国解析数论学术交流会上宣读，会上主持人谢盛刚教授、会下陈勇高副教授都肯定了文中的四个容斥公式的正确性。会后缩减成《偶数 Goidbach 问题解数的计算公式》并寄给王元，王元回信说“我不搞数学了，原稿退还”。投稿后发表在右江民族师专学报(自然科学版)，1997，3。10－12

Goidbach 猜想能不能用初等方法解决？这一直是“哥迷”与某些数学家之间的分歧。本文至少可以说明，Goidbach 猜想中的某些问题是可以用初等方法解决的。考虑到不容易得到右江民族师专学报(自然科学版)，1997，3，10－12。抄录供有兴趣者一阅，抄录时有所更改。

1，在《用类比方法得到哥德巴赫猜想(A)的答案数量的上、下界估计》一文中得到:

$$\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2} > r_2(N) > \frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2}\text{。}(p|N，3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}\text{。})$$

此公式表明，$N\to\infty$时，哥德巴赫猜想(A)的答案数量会无限多。

2，在《探讨哈代－李特伍德猜想中的隐函数——兼论哥德巴赫猜想(A)成立》一文中得到:

$$r_2(N)=\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}(1\pm\delta)$$ 或

$$r_2(N)=\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}(1\pm\delta)$$

若能证明，$N\to\infty$时，$\frac{\lambda}{\varepsilon}\to1$，或$\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}\to1$，则哈代－李特伍德猜想(A)成立。 2010-05-22