The implicit function in the Hardy-Littewood conjecture

Tong Xin Ping

Abstract: The r2(N)~2c(N)N/ln N ln N is the Hardy-Littewood conjecture. We can obtain r2(N)=2c(N)(1±δ)(λ/ε)(π(N)π(N)/N) or r2(N)=2c(N)(1±δ)(ψ/εε)(π(N)π(N)/N). Because δ→0, λ/ε=ψ/εε>0, We can proved Goldbach conjecture. If N → ∞, we can prove that λ/ε → 1, (or ψ/εε → 1,) we can prove that Hardy-Littewood conjecture. At present, only by experimental observation of these phenomena.

Key Words: Goidbach conjecture Hardy-Littewood conjecture

探讨哈代－李特伍德猜想中的隐函数

——兼论哥德巴赫猜想(A)成立

童 信 平

txp1313abc@hotmail.com

摘 要 本文指出，哈代－李特伍德猜想关于 $r_2(N)$和 $P_k(N)$的计算公式中，应该增加参变量(1±δ)、λ/ε (或 ψ/εε)。①(1±δ)>0，λ/ε>0。(或 ψ/εε>0。)哥德巴赫猜想(A)成立；②若 N→∞时，λ/ε→1(或 ψ/εε→1)。则哈代－李特伍德猜想(A)和双生素数(p,p+k)数量猜想成立。目前，只能用实验验证λ/ε→1(或 ψ/εε→1)。

关键词 哥德巴赫猜想(A) 哈代－李特伍德猜想(A) 双生素数猜想 隐函数

0 引言。

1742 年出现哥德巴赫猜想(A):“偶数中的复合数都可以表示为二个素数之和。”简称“1+1”。

1921 年，哈代在皇家学会演讲时指出：“哥德巴赫猜想似乎不能用 Brun 的方法(即 1920 年的“9+9”到 1966 年的“1+2”。)来证明。能够最终证明猜想的方法，应该与我与李特伍德的方法类似。我们不是在原则上没有成功，而是在细节上没有成功。”

哈代说的“我们不是在原则上没有成功”指的是：①“1+1”的答案数量 $r_2(N)$ (又称表法个数、解数)可以用公式(1)计算，简称哈代－李特伍德猜想(A)；②双生素数(p,p+k)数量 $P_k(N)$可以用公式(2)计算，简称双生素数(p,p+k)数量的猜想；③哥德巴赫猜想(B)的答案数量 $r_3(n)$的计算公式。简称哈代－李特伍德猜想(B)。1937 年在大偶数中取得证明并称为“三素数定理”。

(1) $$r_2(N) \sim \frac{2N}{\ln^2 N}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\p>2}}\frac{p-1}{p-2} \sim 1.3202\frac{N}{\ln N\ln N}\prod_{\substack{p|N\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}$$

(2) $$P_k(N) \sim \frac{2N}{\ln^2 N}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|k\\p>2}}\frac{p-1}{p-2} \sim 1.3202\frac{N}{\ln N\ln N}\prod_{\substack{p|k\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}$$

哈代说的“在细节上没有成功”是承认还有未揭示的、对解数影响不明显的参变量(“细节”)。

本文用素数个数的筛法公式和“1+1”解数的筛法公式指出，在公式(1)、(2)中除了要增加(1±δ)外，(δ→0。)还有未被发现的参变量 ε、λ、ψ，并以λ/ε或 ψ/εε影响着解数。

1 对参变量及其近似值的进一步思考。

N——偶数中的复合数。N=4，6，8，10，……。

p_i——素数。$p_i<\sqrt{N}$。$p_i=p_1$，p_2，…，p_i，…，p_r。i=1，2，…，r。r=π($\sqrt{N}$)。

根据素数定理，N→∞时，$\pi(N) \sim \dfrac{N}{\ln N}$，因此有 $\dfrac{2\pi(N)\pi(N)}{N} \sim \dfrac{2N}{\ln^2 N}$，前者是参变量，后者只是参变量的近似值。换句话说，从理论上讲，公式(1)应该弃用近似值而用其确切的参变量。

又因为除素数 2、3 外，其余素数可分为 $p_+=6t+1$ 和 $p_-=6t-1$ 这样二类，它们才是决定实际解数的、最原始的、真正的参变量，换句话说，“1+1”答案的组成可分为三类：$N_1= p_+ + p_+'$；$N_2= p_+ + p_-$；$N_3= p_- + p_-'$。已经知道，p_-的个数$(=(1+\delta)\pi(N)/2)$要比 p_+的个数$(=(1-\delta)\pi(N)/2)$多一些。根据等差数列的素数定理，N→∞时，δ→0。所以，$N_3= p_- + p_-'$ 的解数要比 $N_1= p_+ + p_+'$ 或 $N_2= p_+ + p_-$的解数多一些，可以用(1±δ)进行修正。目前，δ还无法计算，却可以用某些实验显示出它的存在，所以，公式(1)应该用参变量及其“细节”δ表示出来，如公式(1A)所示。

$$\text{(1A)}\quad r_2(N) \sim \frac{2\pi(N)\pi(N)}{N} \prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}\ (1\pm\delta)$$

取 $N=2^7 \sim 2^{21}$。作不计及δ的公式(1A)和公式(1)的精确度(=计算值/实际解数)曲线，(见附录，图 1。) 公式(1A)的精确度曲线在 1.0 两侧出现逐渐衰减的振荡，公式(1)的精确度曲线在慢慢趋近于 1.0 的渐近线两侧出现逐渐衰减的振荡。这些逐渐衰减的振荡就是δ在变化。

从图 1 可以看出，N→∞时，两式之间的差值已经可以忽略不计，取公式(1)更简单、方便。这就是大家忽略公式(1A)的原因，但是，从内在原因及精确度考虑，必竟是公式(1A)更好。

在图 1 中除了暴露δ外，几乎看不出其他的有规律性的“细节”了，下面采用别的方法。

2　用三个假设也可以得到当年的哈代一李特伍德猜想(A)。

假设之一：假设不大于 N 的素数个数π(N)可以用公式(一)计算。

$$\text{(一)}\quad \pi(N) = N \prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}} \frac{p-1}{p} = N \prod_{1\leqslant i\leqslant r} \left(1-\frac{1}{p_i}\right) = N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

$$= N - \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \frac{N}{p_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant r} \frac{N}{p_i p_j} - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r} \frac{N}{p_i p_j p_k} + \ldots + (-1)^r \frac{N}{p_1 p_2 \ldots p_r}$$

假设之二：假设“1+1”的解数 $r_2(N)$可以用公式(二)计算。

$$\text{(二)}\quad r_2(N) = \pi(N) \prod_{\substack{(p_i,\ N)=1 \\ 2\leqslant i\leqslant r}} \frac{p_i-2}{p_i-1} \prod_{\substack{(p_i,\ N)=p_i \\ 2\leqslant i\leqslant r}} 1 = \pi(N) \prod_{\substack{(p,\ N)=1 \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{\substack{(p,\ N)=p \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-2}{p-1}\,\frac{p-1}{p-2}$$

$$= \pi(N) \prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{\substack{p|N \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$= \pi(N)\left(1-\frac{1}{p_2-1}\right)\left(1-\frac{1}{p_3-1}\right)\left(1-\frac{1}{p_4-1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r-1}\right) \prod_{\substack{p|N \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$$

$$=\Bigg\{\pi(N) - \sum_{2\leqslant i\leqslant r} \frac{\pi(N)}{p_i-1} + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant r} \frac{\pi(N)}{(p_i-1)(p_j-1)} - \sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant r} \frac{\pi(N)}{(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)}$$

$$+\cdots+(-1)^{r-1} \frac{\pi(N)}{(p_2-1)(p_3-1)\ldots(p_r-1)}\Bigg\} \prod_{p|N} \frac{p-1}{p-2}$$

$3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}$

假设之三：假设“1+1”的解数 $r_2(N)$可以用公式(三)计算。

$$(\text{三})\quad r_2(N)=N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\prod_{\substack{(p_i,\,N)=1\\2\leqslant i\leqslant r}}\frac{p_i-2}{p_i}\prod_{\substack{(p_i,\,N)=p_i\\2\leqslant i\leqslant r}}\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$=N\left(1-\frac{1}{2}\right)\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$=N\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}\text{。}$$

公式(二)×1=公式(二)×(π(N)/公式(一)的右边)后，可以得到公式(四)。

$$(\text{四})\quad r_2(N)=\pi(N)\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}\times\pi(N)/N\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}$$

$$=\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

公式(三)×1^2=公式(三)×(π(N)/公式(一)的右边)^{2}后，也可以得到公式(四)。

既然可以用二种方法得到公式(四)，而且，根据 $\pi(N)\sim\frac{N}{\ln N}$，还可以从公式(四)得到公式(1)，根据这一点，是不是说明可以用二种方法证明哈代－李特伍德猜想(A)？且慢，哈代当年承认公式(1)“在细节上没有成功”。由此可见，公式(四)也是“在细节上没有成功”。因为公式(1)和(四)都是由假设导出的，所以，要各自弄清楚在假设中忽略了哪些“细节”。

为了寻找公式(四)中被忽略的其他“细节”(参变量)，再作公式(二)、(三)的精确度曲线，(见附录，图 1，)在图 1 中，N 继续增大时，公式(1)、(1A)都趋近于 1；公式(二)、(三)都没有趋近于 1，相反，它们的误差 c、d 却在增大，慢慢地会超过公式(1)的逐渐减小的误差 e。换句话说，那时候公式(二)、(三)的价值还不如公式(1)。(公式(一)的价值则不如 N/lnN。图中未表示。)优胜劣汰，这就可以肯定公式(一)、(二)、(三)因忽略了某些“细节”而不能作为计算公式。

下面分析公式(一)、(二)、(三)中被忽略的某些“细节”并找到正确的表达公式。

3　用二个筛法公式指出三个假设中忽略的“细节”，找到哈代－李特伍德猜想的新形式。

大家知道，π(N)的筛法公式(容斥公式)如公式(3)[1]。

$$(3)\quad \pi(N)=(r-1)+\left\{N-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\left[\frac{N}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right]+\dots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\dots p_r}\right]\right\}$$

公式(3)是准确无误的，其中$\left[\frac{N}{p_i}\right]$、$\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]$等与公式(一)的$\frac{N}{p_i}$、$\frac{N}{p_ip_j}$等之间的小数点的差异会聚沙成塔，最终影响计算结果，理论上要采用公式(4)才能成立。(公式(一)误认为 ε=1。)

$$(4)\quad \pi(N)=\varepsilon N\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}$$

已经知道，“1+1”解数 $r_2(N)$的筛法公式如公式(5)[2]。

(5) $r_2(N)= 2N(1,1)_i + N(1,1)_r$

$$=2N(1,1)_i+\pi(N)_r-\sum_{2\leqslant i\leqslant r}\pi(p_i)_r+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant r}\pi(p_ip_j)_r-\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant r}\pi(p_ip_jp_k)_r+\cdots+(-1)^{r-1}\pi(p_2p_3\ldots p_r)_r$$

式中 $N(1,1)_i$——$N= p_i+ (N-p_i)$= “1+1” 的解数。这是公式(3)中与 r 相关的 “1+1” 的解数，$N\to\infty$时，r 可以忽略不计，所以，$N(1,1)_i$ 也可以忽略不计。

$N(1,1)_r$——$N= p+ (N-p)$= “1+1” 的解数。p 是处于闭区间 $[p_r+1，N-p_r-1]$ 内的素数。其数量是 $\pi(N)_r$。$N\to\infty$ 时，$\pi(N)_r\sim\pi(N)$。

$a_i+n p_i$, $a_{ij}+np_ip_j$, $a_{ijk}+np_ip_jp_k$，…，——$(N, p_1p_2\ldots p_r)=2$ 时，以 N 为末项、以 p_i、p_ip_j、$p_ip_jp_k$，… 为公差的等差数列。

$\pi(p_i)_r$，$\pi(p_ip_j)_r$，$\pi(p_ip_jp_k)_r$，…，——闭区间内，以上的每一个等差数列中的素数个数。($p_i\mid N$ 时，$\pi(p_i)_r=0$。)

闭区间内的 a_i+np_i 中的素数，(数量是 $\pi(p_i)_r$。) 都不会是 “1+1” 的解[2]。合计是 $\Sigma\pi(p_i)_r$，应该从 $\pi(N)_r$ 中减去。在减去 $\pi(p_i)_r$ 和 $\pi(p_j)_r$ 时，因出现重复减去[2]而要补加 $\pi(p_ip_j)_r$，合计是 $\Sigma\pi(p_ip_j)_r$。同理，对 $\pi(p_ip_jp_k)_r$ 应是补减，合计是 $\Sigma\pi(p_ip_jp_k)_r$，以此类推得到公式(5) [2]。

公式 (5) 中 $N(1,1)_r$ 是准确无误的，其中 $\pi(p_i)_r$，$\pi(p_ip_j)_r$ 等与公式(二)的 $\frac{\pi(N)}{p_i-1}$、$\frac{\pi(N)}{(p_i-1)(p_j-1)}$ 等的数量上的微小差异会聚沙成塔，最终影响计算结果，理论上要采用公式 (6) 才能成立。(公式 (二) 误认为 $\lambda=1$。)

(6) $$r_2(N)=\lambda\pi(N)\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{\substack{p\mid N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}。$$

同理，公式 (5) 中的 $\pi(p_i)_r$ 等与公式(三)中的正、反方向各筛去 $\frac{N}{p_i}$ 的小数点上的差异会聚沙成塔，最终影响计算结果，理论上要采用公式 (7) 才能成立。(公式 (三) 误认为 $\psi=1$。)

(7) $$r_2(N)=\psi\frac{N}{2}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-2}{p}\prod_{\substack{p\mid N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}。$$

ε、λ、ψ 是存在的，见附录，表 1。用前面得到公式 (四) 的方法可以得到公式 (8)、(9)。

(8) $$r_2(N)=\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}(1\pm\delta)$$

(9) $$r_2(N)=\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}(1\pm\delta)$$

公式(8)或(9)就是找到“细节” ε、λ、ψ 后的哈代－李特伍德猜想(A)的新形式，这些“细节”方便了哥德巴赫猜想(A)的证明。

定理 1 哥德巴赫猜想 (A) 成立。

证明 从哈代－李特伍德猜想(A)的新形式公式 (8) 或 (9) 可知，$(1\pm\delta)>0$，$\frac{\lambda}{\varepsilon}>0$，$\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}>0$。必有 $r_2(N)>0$，也就是说，$r_2(N)$ 有解且随 $\pi(N)$ 增大而增多，哥德巴赫猜想 (A) 成立。证毕。

由公式 (8)＝公式 (9)，可知 $\frac{\lambda}{\varepsilon}=\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}$。换句话说，若能证明：$N\to\infty$ 时，$\frac{\lambda}{\varepsilon}\to1$ 或 $\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}\to1$，则哈代－李特伍德猜想(A)成立。目前，我们只能用实验显示它们的存在，见附录，表 1。

4 讨论。

本文得到哈代－李特伍德猜想中的隐函数$\frac{\lambda}{\varepsilon}>0$或$\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}>0$。并证明了哥德巴赫猜想(A)。

本文用实验证实了 ε、λ、ψ 和$\frac{\lambda}{\varepsilon}=\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}$的存在。使我们看到，N→∞时，$\frac{\lambda}{\varepsilon}\to 1$或$\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}\to 1$，但是，要证明“→1”却是比较困难的，换句话说，要证明哈代－李特伍德猜想(A)还需要时间。

上述结果可以推广到哈代－李特伍德的双生素数(p,p+k)的数量猜想 $P_k(N)$中去，得到相同的结论。换句话说，把公式(8)、(9)中的 p｜N 换成 p｜k 就是公式(2)的新形式。具体推导从略。

参考文献

[1] 王元，谈谈素数，上海教育出版社，1978 年，32 页。

[2] 童信平，偶数 Goldbach 问题解数的计算公式，右江民族师专学报(自然科学版)，1997，3，10－12。

2010，04，04

附录

表 1 和图 1

表 1

N	ε	λ	ψ	$\frac{\lambda}{\varepsilon}$	$\frac{\psi}{\varepsilon\varepsilon}$
128	1.16553	0.68817	0.80208	0.59044	0.59043
256	1.09973	1.14927	1.26384	1.04505	1.04501
512	1.10776	0.99357	1.10063	0.89692	0.89691
1024	1.09890	1.25949	1.38405	1.14614	1.14613
2048	1.06463	0.86095	0.91659	0.80868	0.80868
4096	1.04642	1.07850	1.12857	1.03066	1.03066
8192	1.03223	0.91938	0.94901	0.89067	0.89067
16384	1.01845	1.05585	1.07533	1.37672	1.03672
32768	1.01060	0.99148	1.00198	0.98108	0.98107
65536	0.99472	1.00308	0.99772	1.00840	1.00834
131072	0.98848	0.97902	0.96774	0.99043	0.99043
262144	0.98334	0.96897	0.95283	0.98539	0.98539
524288	0.97526	0.97360	0.94951	0.99830	0.99829
1048576	0.96997	0.97057	0.94142	1.00062	1.00061
2097152	0.96421	0.94496	0.91114	0.98004	0.98004
19999996	0.95284	0.94613	0.90150	0.99296	0.99295
24999998	0.95182	0.95232	0.90644	1.00053	1.00053
100000094	0.94642	0.94461	0.89400	0.99809	0.99809
				比值→1	比值→1

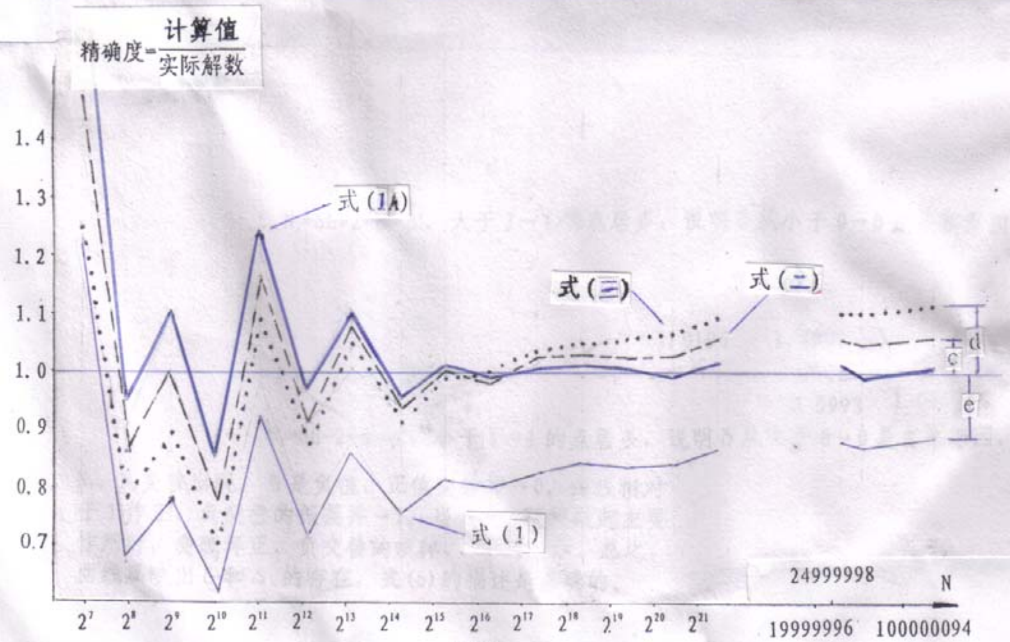

图 1