Goldbach conjecture (A): upper bound estimation and lower bound estimation

Tong Xin Ping
txp1313abc@hotmail.com

Abstract: We have sieve method formula of π(N) and sieve method formula of $r_2(N)$. By these sieve method formula, we can obtain $\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2} > r_2(N) > \frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2}$。(p|N，3≤p≤$\sqrt{N}$。)

用类比方法得到哥德巴赫猜想(A)的答案数量的上、下界估计

童 信 平
txp1313abc@hotmail.com

摘要 本文引用素数个数π(N)的筛法公式(容斥公式)和哥德巴赫猜想(A)的答案数量 $r_2(N)$的筛法公式。通过这二个筛法公式的类比，得到哥德巴赫猜想(A)的答案数量的上、下界估计 $\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2} > r_2(N) > \frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2}$。(p|N，3≤p≤$\sqrt{N}$。)

关键词 哥德巴赫猜想(A)　答案数量　上界估计　下界估计

"偶数中的复合数都可以表示为二个素数之和。"——这就是常说的哥德巴赫猜想(A)或偶数哥德巴赫猜想。简称"1+1"。

德国哲学家康德说过:"每当理智缺乏可靠论证的思路时，类比这个方法往往能够指引我们前进。"

本文把"1+1"在闭区间内的答案数量(解数) $N(1,1)_r$ 的筛法公式与素数个数π(N)的筛法公式(容斥公式)进行类比，得到"1+1"解数 $r_2(N)$的上、下界估计。

1　用逐步淘汰法建立的素数个数π(N)的筛法公式(容斥公式)[1]。

N——偶数中的复合数。N=4，6，8，10，……。

p_i——素数。$p_i<\sqrt{N}$。$p_i=p_1$，p_2，…，p_i，…，p_r。i=1，2，…，r。r=π($\sqrt{N}$)。

[A]——数值 A 的整数部分。例如，[5.96]=5。

当 A 是函数式时，把 A 展开成一个一个的数值，再取每一个数值的整数部分。如公式(1)所示的素数个数的筛法公式(容斥公式)。

$$(1)\quad \pi(N)=(r-1)+\Big[N\prod_{2\le p\le\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}\Big]=(r-1)+\Big[N\prod_{1\le i\le r}\frac{p_i-1}{p_i}\Big]$$

$$=(r-1)+\Big[N\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_3}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_r}\Big)\Big]$$

$$=(r-1)+\{N-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}[\frac{N}{p_i}]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}[\frac{N}{p_ip_j}]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}[\frac{N}{p_ip_jp_k}]+\ldots+(-1)^r[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r}]\}$$ [1]

$N\to\infty$时，$\pi(\sqrt{N})/\pi(N)\to 0$。应用公式(1)时，$\pi(\sqrt{N})$、$(r-1)$可以忽略不计。确切地说，本文忽略区间(0，$p_r+1$)内的素数以及该区间的“1+1”的解数 $2N(1,1)_i$；包括取$\pi(N)_r$为$\pi(N)$；$\pi(p_i)_r$为$\pi(p_i)$；……。

(2) $$2[N\prod_{2\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\frac{p-1}{p}]=[2N\prod_{1\leqslant i\leqslant r}\frac{p_i-1}{p_i}]=[N(1-\frac{1}{p_2})(1-\frac{1}{p_3})\cdots(1-\frac{1}{p_r})]$$

$$=N-\sum_{2\leqslant i\leqslant r}[\frac{N}{p_i}]+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant r}[\frac{N}{p_ip_j}]-\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant r}[\frac{N}{p_ip_jp_k}]+\ldots+(-1)^r[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r}]$$

2 用逐步淘汰法建立的“1+1”答案数量(解数) $N(1,1)_r$ 的筛法公式 [2]。

p——闭区间[p_r+1，$N-p_r-1$]内(以下简称闭区间)的素数。$(p_r+1)<p<(N-p_r-1)$

$\pi(N)_r$——p 的数量，也就是闭区间内的素数数量。$\pi(N)_r=\pi(N-p_r-1)-\pi(p_r+1)=\pi(N-p_r-1)-r$。$N\to\infty$时，$\pi(N)_r\sim\pi(N)$。

$r_2(N)$——“1+1”的答案数量(解数)。

根据以上规定，$N=p_i+(N-p_i)=p+(N-p)$=“1+1”时，因为$(N-p_i)$和$(N-p)$中的素数数量之和就是“1+1”的答案数量 $r_2(N)$，故有 $r_2(N)=N(1,1)_R+2N(1,1)_i$。

$N(1,1)_R$——$(N, p_1p_2\cdots p_r)\geqslant 2$ 时，$(N-p)$中的“1+1”的解数。

$N(1,1)_i$——$(N-p_i)$中的“1+1”的解数。实验证明某些 N 的$(N-p_i)$都是合数而使 $N(1,1)_i=0$。

$N(1,1)_r$——$(N, p_1p_2\cdots p_r)=2$ 时，$(N-p)$中的“1+1”的解数[2]。(见公式(3)。)

$a_i+n p_i$, $a_{ij}+np_ip_j$, $a_{ijk}+np_ip_jp_k$, …, ——$(N, p_1p_2\cdots p_r)=2$ 时，以 N 为末项、以 p_i、p_ip_j、$p_ip_jp_k$、…为公差的等差数列。

$\pi(p_i)_r$，$\pi(p_ip_j)_r$，$\pi(p_ip_jp_k)_r$，…，——闭区间内，以上的每一个等差数列中的素数个数。

定理 1 $(N, p_1p_2\cdots p_r)=2$ 时，闭区间内，“1+1”的解数 $N(1,1)_r$ 可用公式(3) [2]计算。

(3) $$N(1,1)_r=\pi(N)_r-\sum_{2\leqslant i\leqslant r}\pi(p_i)_r+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant r}\pi(p_ip_j)_r-\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant r}\pi(p_ip_jp_k)_r+\cdots+(-1)^{r-1}\pi(p_2p_3\ldots p_r)_r$$ [2]

证明 闭区间内的 a_i+np_i 中的素数，(数量是$\pi(p_i)_r$。)都不会是“1+1”的解[2]。合计是$\sum\pi(p_i)_r$。应该从$\pi(N)_r$中减去。在减去$\pi(p_i)_r$和$\pi(p_j)_r$时，因出现重复减去而要补加$\pi(p_ip_j)_r$[2]，合计是$\sum\pi(p_ip_j)_r$。同理，对$\pi(p_ip_jp_k)_r$应是补减，合计是$\sum\pi(p_ip_jp_k)_r$，以此类推，得到式(3)。证毕。

<u>引理 1</u>(素数定理) 当 $N\to\infty$时，$\pi(N)\sim\dfrac{N}{\ln N}$。

<u>引理 2</u>(等差数列的素数定理) $(p_i,a_i)=1$ 时，末项不大于 N 的等差数列 a_i+np_i 中，当 $N\to\infty$ 时，其素数个数$\pi(p_i)\sim\dfrac{N}{\varphi(p_i)\ln N}$。($\varphi(p_i)$是欧拉函数。$\varphi(p_i)=p_i-1$。$\varphi(p_ip_j)=(p_i-1)(p_j-1)$。)

公式(3)中，取$\pi(p_i)_r\sim\dfrac{\pi(N)_r}{p_i-1}\sim\dfrac{\pi(N)}{p_i-1}\sim\dfrac{\pi(N)}{N}(\dfrac{N}{p_i-1})$。因为公式(1)~(3)的第一个$\Sigma$对它们的答案数量有决定性的作用。取$\dfrac{\pi(N)}{N}(\dfrac{N}{p_i-1})$中的$(\dfrac{N}{p_i-1})$与公式(1)、(2)作具体比较如下:

公式(1)的$\sum[\frac{N}{p_i}]=[\frac{N}{2}]+[\frac{N}{3}]+[\frac{N}{5}]+[\frac{N}{7}]+[\frac{N}{11}]+[\frac{N}{13}]+[\frac{N}{17}]+\cdots\cdots+[\frac{N}{p_{r-1}}]+[\frac{N}{p_r}]$。

公式(3)的$(\frac{N}{p_i-1})=(\frac{N}{2})+(\frac{N}{4})+(\frac{N}{6})+(\frac{N}{10})+(\frac{N}{12})+(\frac{N}{16})+(\frac{N}{18})+\cdots\cdots+(\frac{N}{p_r-1})$。

公式(2)的$\sum[\frac{N}{p_i}]=[\frac{N}{3}]+[\frac{N}{5}]+[\frac{N}{7}]+[\frac{N}{11}]+[\frac{N}{13}]+[\frac{N}{17}]+[\frac{N}{19}]+\cdots\cdots+[\frac{N}{p_r}]$。

从上到下，除第一列$[\frac{N}{2}]\sim(\frac{N}{2})>[\frac{N}{3}]$外，其余的都是，$[\frac{N}{3}]>(\frac{N}{4})>[\frac{N}{5}]$，$[\frac{N}{5}]>(\frac{N}{6})>[\frac{N}{7}]$，$[\frac{N}{7}]>(\frac{N}{10})>[\frac{N}{11}]$，…，$[\frac{N}{p_{r-1}}]>(\frac{N}{p_r-1})>[\frac{N}{p_r}]$。大者表示减去的多而留下的少，小者表示减去的少而留下的多。这就可以对公式(1)～(3)的答案数量作初步比较了，考虑到公式(3)比较的对象是$\frac{\pi(N)}{N}(\frac{N}{p_i-1})$，公式(1)、(2)要各乘$\frac{\pi(N)}{N}$，可得

式(2)$\times\frac{\pi(N)}{N}>$式(3)$>$式(1)$\times\frac{\pi(N)}{N}$。即

$2\pi(N)\times\frac{\pi(N)}{N}>N(1,1)_r>\pi(N)\times\frac{\pi(N)}{N}$。

已经知道，当$(N, p_1p_2\cdots p_r)\geqslant 2$时，闭区间内的“1+1”解数$N(1,1)_R$可用公式(3a)表示[3]。

(3a) $N(1,1)_R\sim N(1,1)_r\times\prod\frac{p-1}{p-2}$。（$p|N$，$3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}$。见文[3]引理3。）

前面指出，$r_2(N)=N(1,1)_R+2N(1,1)_i$，$2N(1,1)_i$可以忽略不计。故有

$$\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2}>r_2(N)>\frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2}。（p|N，3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}。）$$

N比较大，π(N)无法计算时，根据引理1，可取

$$2\frac{N}{\ln N\ln N}\prod\frac{p-1}{p-2}>r_2(N)>\frac{N}{\ln N\ln N}\prod\frac{p-1}{p-2}。（p|N，3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}。）$$

3 讨论。

根据引理1，把参变量的近似值还原为参变量后，哈代－李特伍德猜想(A)便是

$$r_2(N)\sim 1.3202\frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2}。（p|N，3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}。）$$

与本文的上、下界估计的比较可知，2＞1.3202＞1。由此可知，本文的上、下界估计是比较接近实际解数的。

与以前得到的上界估计的系数值7.8342相比，本文能降低到2可以说是一个大跃进。

上述方法完全可以推广到双生素数(p,p+k)数量的下界估计中去，这就是公式(1)、(2)与双生素数(p,p+k)数量的筛法公式[4]进行类比，便可得到小于N，相差为一个偶数k的素数对(双生素数)的数量$P_k(N)$的上、下界估计。

$$\frac{2\pi(N)\pi(N)}{N}\Pi\frac{p-1}{p-2}>P_k(N)>\frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\ \Pi\frac{p-1}{p-2}$$。（p＞2，p|k。）

参考文献

[1] 王元，谈谈素数，上海教育出版社，1978 年，32 页。

[2] 童信平，偶数 Goldbach 问题解数的计算公式，右江民族师专学报(自然科学版)，1997，3，10－12。

[3] 黄勇、童信平，偶数 Goldbach 问题解数的下界估计，广西民族学院学报(自然科学版)，2002，2，4－6。

[4] 黄勇、童信平，双生素数 (P,P+N) 的数量的计算公式，广西民族学院学报(自然科学版)，2001，1，9－11。

2009，04，01，一稿。 2010，03，10，三稿。