TWO UNCERTAINTY PRINCIPLES?

¿DOS PRINCIPIOS DE INCERTIDUMBRE?

Anthony Pinedo Araujo

Universidad Privada del Norte – Perú

Abstract

There are two uncertainty principles, but most of students get confused between both of them because of the lack of conceptual context that this topic is explained in books. In this article, both principles are discussed, making the differences between them clear. Also, I propose some examples that are very easy to understand by students.

Resumen

Pese a la existencia de dos principios de incertidumbre, la mayoría de los estudiantes de pregrado suelen confundir ambas debido al poco enfoque teórico que se le suele dar a este tema dentro de los libros de mecánica cuántica elemental. Aquí se discute a detalle ambos principios, estableciendo las diferencias entre ambos con ejemplos fácilmente asimilables por el estudiante.

Introducción

¿Conoces acerca del principio de incertidumbre de Heinsenberg? Estoy seguro que sí, pero ¿sabías que existían dos principios incertidumbre de Heinsenberg, uno independiente del otro?

Dentro del marco de la Mecánica Cuántica elemental, ambos principios suelen confundirse e incluso mezclarse. Muchos han escuchado desde que empiezan la carrera de física, sobre el asombroso mundo de la mecánica cuántica, en donde pasan sucesos extraordinarios vista desde nuestro punto de vista mesocóspico. ¿Cuántos no se sintieron emocionados, al saber que un electrón podría atravesar una pared de potencial? ¿Cuántos no se pudieron a imaginar, que sería posible que nosotros traspasemos paredes? En fin, muchas ideas se vinieron a la cabeza de muchos cuando empezaron a estudiar este campo. Por el otro lado, este mundo nos guardaba una sorpresa.

Dentro del mundo cuántico, es la ecuación de Schrödinger la que gobierna la evolución de los objetos, siempre que no sean “observados” por nosotros. Mientras que, cuando queremos realizar alguna medida sobre este sistema, el sistema simplemente “colapsa”.

Recordando los fundamentos de la mecánica cuántica

Para entender ese “colapso”, debemos recordar que en la mecánica cuántica, un objeto puede encontrarse en una superposición lineal de autoestados en alguna base de autovectores del sistema. En términos matemáticos, sea $|\psi(t)\rangle$ el vector estado que rige la evolución de un sistema cuántico determinado; y sea $|m\rangle$ una base de autovectores de $|\psi(t)\rangle$, tenemos que la representación del vector estado en esa base de autovectores será:

$$|\psi(t)\rangle = \sum \psi_m |m\rangle$$

La elección de la base de autovectores dadas, dependerá directamente de la medición que se desee realizar.

La ecuación de Schrödinger establece que, dado un vector estado $|\psi(t)\rangle$, tal vector estado evolucionará de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

Donde $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano.

La solución general de la ecuación de Schrödinger es muy engorrosa de trabajar, debido a que no es tan simple como resolver una ecuación diferencial, sino que requiere trabajar en un espacio vectorial. Es por esta razón, que generalmente se trabajan con Hamiltonianos que conmutan o que sean independientes del tiempo.

No debe confundirse, el vector estado de un sistema, con la función de onda: la función de onda es la representación del vector estado sobre el espacio de las coordenadas espaciales. Es por eso, que los estudiantes de mecánica cuántica elemental podían resolver la ecuación de Schrödinger sin problemas mayores: no estaban encontrando la solución general, solo la particular, para el caso espacial.

Veamos que la ecuación de Schrödinger es completamente determinista. Es decir, dado un vector estado inicial, se puede definir cómo se comportará tal vector estado en el tiempo. Es decir posee un comportamiento *determinista*. Es natural creer que si esto sucede hemos descubierto los secretos del mundo cuántico. Pero había más sorpresas por descubrir. Para notar ello, recordemos por qué es que la comunidad científica aceptó la ecuación de Schrödinger: era capaz de describir los niveles de energía de los sistemas físicos, con una precisión extraordinaria. Para notar ello, debemos notar que la ecuación de Schrödinger, no es más que una ecuación de valores propios. Todos sabemos que al resolver una ecuación de valores propios obtenemos dos cosas: autovalores y autovectores. Pues bien, debido a que el operador que actúa sobre el término de la derecha es el operador Hamiltoniano, pues los autovalores de tal operador es la energía del sistema. Esto por la analogía que presenta con el mundo clásico, en donde la energía se la asume codificada en el Hamiltoniano. Pues bien, la comunidad científica sabía que los autovalores correspondían efectivamente a las energías encontradas experimentalmente. Pero ¿qué significaban los autovectores del mismo? Esta pregunta mantuvo locos a los físicos de esa nueva ciencia, para encontrarle razón de ser. Pero existía algo más en las observaciones.

Muchos experimentos mostraban algo muy extraño: repetidos experimentos sobre un mismo vector estado, arrojaba resultados diferentes. ¿Qué estaba pasando? “Debe existir alguna fuerza desconocida que está actuando allí”, pensaron muchos físicos. Me imagino cómo se pudieron haber sentido tales físicos, al encontrar tales resultados: no podían dormir pensando que toda la concepción determinista, tomada hasta ese tiempo, podría estar en la cuerda floja. Peor aún, la posibilidad de que el “azar” esté detrás de tales mediciones, era una idea aterradora. Para entender esto, supongamos a usted se le pide medir su talla. Para ello se le dota a usted de una tecnología muy avanzada de clonación, la cual es capaz de crear copias exactas de usted en menos de un segundo. Como usted no desea tomarse la media directamente sino sobre sus clones, que se suponen son exactamente iguales que usted, entonces realiza la primera medición y obtiene 1.73 m usted cree que mide más y realiza la misma medición sobre otro clon y encuentra que mide 2.50 m, usted se pone a dudar sobre las medidas y la realiza denuevo sobre un tercer clon y obtiene 0.53 m. “¿Qué está pasando? ¿No se supone que todos ellos son exactamente iguales a mi?” se preguntaría. Ahora imagínese lo mismo en el mundo de la física, en donde por tanto tiempo, trataron de encontrar respuesta *lógico-racionales* para los fenómenos físicos, y que de pronto, medidas hechas bajo sistemas cuidadosamente preparados, obtengan resultados diferentes. Muchos buscaban respuestas pero no encontraban ninguna, hasta que notaron algo.

Se empezaron a acumular más datos de repetidas mediciones, y se notó que esas mediciones “aleatorias” parecían seguir algún ordenamiento estadístico. Para notar esto, sigamos con el ejemplo de la talla, pero ahora suponga que usted no se rinde y dice: “Debe existir alguna regla aquí escondida, y voy a encontrarla” y decide continuar con las mediciones, y lo que encuentra es que algunas medidas se vuelven a repetir. Digamos que después de un día de mediciones continuas, logra tomar mil de datos sobre su talla en diferentes clones. Luego los copia dentro de algún programa informático, y empieza a agruparlos. Y usted nota que el dato de 1.73 m tiene una frecuencia de 23 % la medida de 2.50 m tiene una frecuencia 15% la medida 0.53 m tiene una frecuencia de 27% y por último la medida de 1.51 m tiene una frecuencia de 35%. Como su meta es tratar de encontrar alguna regla escondida, usted continua con las mediciones por la siguiente semana, y toma diez mil datos más, y los vuelve a agrupar y nota que las proporciones estadísticas se mantienen. “Eureka!” diría usted. Pero como usted es un buen científico, entonces decide una última confirmación, y continúa con la toma de datos por el siguiente mes, llegando a un millón de datos, y sigue notando que se rigen bajo la misma distribución estadística. Entonces usted podría llegar a una conclusión: “Ciertamente, el resultado de una sola medición no puede ser determinada, pero en un conjunto de tomas de muchos datos, estos deben seguir alguna ley estadística”. Eso precisamente sucedió, científicos como Niels Bohr y Von Newmann notaron que estas mediciones seguían una distribución estadística, tal como usted, un genial científico, ha encontrado con su talla.

El problema, estribaba entonces ¿Cómo determinamos tales distribuciones estadísticas? Es natural creer que si la ecuación de Schrödinger lograba determinar los niveles de energía de los sistemas, debe estar íntimamente relacionada con estos resultados “estadísticos” pero el camino no era conocido.

De por sí la ecuación de Schrödinger, era un problema para los físicos, debido a que era la primera vez dentro de las ecuaciones de la física matemática, que encontraban soluciones del tipo complejas (parte real más parte imaginaria). ¿Qué sentido tiene que las soluciones de alguna entidad física fuesen imaginarias? Es por eso, que las soluciones de la ecuación de Schrödinger no tenían relevancia dentro de la comunidad científica.

Pero sucedió algo extraordinario, se encontró la ley que rige ese comportamiento estadístico. Esta ley podría establecerse de la siguiente manera: *Sea $|\psi\rangle$ el vector estado de un sistema cuántico, decimos que medimos el observable A que está representado por el operador hermítico que está denotado por $\hat{A}$ el cual posee autovalores a_n y autovectores degenerados $|u_n^i\rangle$, donde i=1,..,g, y g es el grado de degeneración. Entonces los posibles resultados de tal medición están dados por a_n y cada resultado se obtendrá bajo la siguiente probabilidad:*

$$p(a_n) = Tr(P_n\hat{\rho})$$

Donde P es el operador proyector y esta dado por $P_n = \sum_{i=1}^{g}|u_n^i\rangle\langle u_n^i|$, $\hat{\rho}$ es el operador densidad, y está dado por $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ y Tr denota el operador Traza.

Nótese que si trabajamos en el espacio de las coordenadas espaciales, entonces el lado derecho de esta expresión, sería el módulo al cuadrado de la función de onda.

Y allí no terminó el problema. Una vez los físicos lograron determinar dicha relación probabilística de las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger. Aún había otro problema que no tenían solución, y es que una vez el sistema cuántico era medido no se podía retornar a su estado inicial, sino que este "colapsaba" a alguno de los autovectores sobre el cual se realizó la medición. Esto era muy extraño, ¿qué le pasa al vector estado después de ser medido? Para responder a este problema, Von Newmann postuló lo que hoy en día se conoce como *colapso de la función de onda*. Para entender este colapso, sigamos con el ejemplo de la talla. Usted había tomado talla sobre sus clones, y obtuvo una distribución estadística dada. Pero nota que sus clones, una vez realizada la mediciones de sus tallas, cuando realiza la misma medición de nuevo sobre cada uno de ellos, sucede que obtiene el mismo valor que el medido inicialmente, por mucho que usted desea que un clon cambie de talla, como era de esperarse, este se mantendrá así por el resto de su vida. Es decir usted no puede *retornar al estado inicial del clon*. La talla del clon, una vez realizada la medición queda determinada, es decir *colapsa* y pierde sus propiedades probabilísticas. En términos matemáticos, podríamos decir que: *Siguiendo las notaciones dadas para el caso de la probabilidad de obtener un resultado determinado, tenemos que el estado post-medición de un sistema estará dado por:*

$$\hat{\rho}_f = \frac{1}{p(q_n)} P_n \hat{\rho} P_n$$

No es la intención de estos escritos profundizar en la parte matemática de los temas: eso lo puede encontrar en cualquier libro de mecánica cuántica elemental. Lo que se pretende es clarificar los conceptos que muchas veces un estudiante los tiene por aceptados pero nunca se ha puesto a pensar en los mismos. Sólo usaremos la matemática cuando sea necesaria tal como lo veremos en las siguientes líneas.

Entendiendo las dos incertidumbres

Ahora usted ya tiene claro que la *no causalidad* es algo inherente en los procesos cuánticos, y que usted solo puede describir procesos a un nivel *estadístico*. Este pequeño concepto es llamado *falta de causalidad* y mantuvo locos a grandes físicos como Einstein, pero no porque ese nombre sonara muy "anti-físico" sino por las tremendas consecuencias que traería la misma sobre determinados fenómenos. A continuación veremos algunos de ellos.

Sigamos con el ejemplo de los clones y las mediciones sobre ellos. Ahora, como usted, estimado lector, es uno de los mejores científicos que el mundo haya conocido en toda su historia, desea seguir investigando con sus "clones cuánticos". Entonces decide hacer otro experimento. A estas alturas, usted ya se puso a estudiar algunas características de los resultados de las mediciones anteriormente mostradas. Y ahora le interesa, que dado un valor medio de todas las tallas, quisiera encontrar la desviación de los valores experimentales respecto de ese valor medio. Además encontró que dentro de la mecánica cuántica existe lo que se conocen como *observables conjugados*, los cuales no son más que dos operadores que no conmutan entre sí, un ejemplo claro son el operador momento y el operador posición. Supongamos que para el caso de los clones, dos observables conjugados sean la talla y el peso. Para esta prueba usted ha creado dos millones de clones, al primer millón de clones usted decide medirles su talla, y al segundo millón de clones le tomará su peso. Usted encuentra que, al obtener las incertidumbres de cada observable las multiplica, y esta multiplicación obedecerá el *primer principio de incertidumbre de Heinsenberg*. Es decir, dados dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$, que son conjugados entre sí, esto es cumplen con:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = i\hat{C}$$

Tenemos que al medir $\hat{A}$ sobre una mitad del ensamble y $\hat{B}$ a la otra mitad, tenemos que se cumple que:

$$\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \hat{C} \right|^2$$

Nótese que en ningún momento un clon llegó a interactuar con otro, sino que simplemente se debe a la naturaleza cuántica propia e inherente a los clones.

Pero supongamos que usted, con su gran imaginación y destreza se pregunta ¿qué sucede cuando intento medir dos observables conjugados pero sobre el mismo objeto? Muy buena pregunta. Para ello usted selecciona un clon y decide medirle su peso y talla al mismo tiempo y luego desea saber cuál es la incertidumbre de dichas mediciones. Repite el mismo procedimiento en otros clones, y nota algo curioso, que los valores obtenidos de las mediciones simultáneas, generan su propia incertidumbre, es decir la medición de la talla de los clones termina afectando la medición de sus pesos, ¿algo extraño? A este fenómeno se lo denomina distorsión por ruido (*back action noise*) y algo aún más curioso nota que es una incertidumbre diferente, porque todos los valores que obtiene para la misma son siempre mayores que cuatro veces lo que menciona el primer principio de incertidumbre. Esto se encontró experimentalmente, pero tardó un poco en encontrar la explicación física de lo que estaba pasando y fue lo que colmó la paciencia de aquellos que la mecánica cuántica violaba la belleza del *determinismo* que por tanto tiempo había reinado.

Este segundo principio se puede escribir matemáticamente como:

$$\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle \geq \left| \hat{C} \right|^2$$

Conclusiones

En resumen, estos dos principios son, usualmente, confundidos indiscriminadamente. Estos dos tipos de incertidumbre son diferentes e independientes:

- La falta de causalidad en una medida única ideal es causada por la naturaleza cuántica del sistema medido y es gobernado por la relación de incertidumbre para la preparación del sistema.

- La distorsión incontrolada impuesta por el objeto medido es debida a la naturaleza cuántica del aparato de medición y es gobernado por la relación de incertidumbre para la medición del sistema.

Esto debe quedar claro que en uno de ellos ambas variables conjugadas no han interactuado de ninguna forma, mientras que en el otro, la medición del conjugado afectó la medición del otro.

Así que, espero de aquí en adelante, cuando se hable de mediciones simultáneas de dos observables conjugados sobre un mismo sistema se les venga a la mente el segundo principio de incertidumbre de Heinsenberg. Mientras que cuando le hablen de propiedades estadísticas de los sistemas cuánticos, se le venga a la mente el primer principio de incertidumbre de Heinsenberg.

Referencias:

- Mesocospic Quantum Mechanics, Yoshihisa Yamamoto, Wiley-Interscience Publication, 1999