<u>Essai sur l'Hypothèse de Riemann</u>

MADANI Bouabdallah

De tous les mathématiciens de renom sollicités, seul M. Andrzej Schinzel (IMPAN, Pologne), et que je remercie infiniment, a accepté d'examiner mon texte début janvier et il en ait résulté 3 observations.
Les 2 premières ont été solutionnées et la 3ème a fait l'objet d'un désaccord.
J'ai demandé l'arbitrage sur ce point à MM. P. Deligne, R. Langlands, E. Bombieri (IAS, Princeton), Umberto Zannier (SNS; Italie) et Mme C. Rousseau(U.M.I.)
Je n'ai pas eu de réponse.
Que signifie ce silence ? Censure, boycott ?
Je serai heureux d'avoir l'avis des mathématiciens sur les possibles erreurs du texte.

<u>Abstract</u>
J.P. Gram (1903) writes p.298 in 'Note sur les zéros de la fonction zéta de Riemann' :
'Mais le résultat le plus intéressant qu'ait donné ce calcul consiste en ce qu'il révèle l'irrégularité qui se trouve dans la série des α. Il est très probable que ces racines sont liées intimement aux nombres premiers.
La recherche de cette dépendance, c'est-à-dire la manière dont une α donnée est exprimée au moyen des nombres premiers sera l'objet d'études ultérieures.'
Also the proof of the Riemann hypothesis is based on the definition of an application between the set $\mathcal{P}$ of the prime numbers and the set $\mathcal{S}$ of the zeros of ζ.

<u>Résumé</u> : Comme la fonction ζ de Riemann est en relation étroite avec la distribution des nombres premiers, la démonstration de l'Hypothèse de Riemann repose sur la définition d'une application entre l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers et l'ensemble $\mathcal{S}$ des zéros de ζ.

<u>Hypothèse de Riemann</u>
Les zéros de la fonction ζ de Riemann appartiennent tous à la droite critique $x = \frac{1}{2}$.

<u>Introduction</u>
Soient les ensembles
$\mathcal{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\dots\}$,
$\mathcal{S} = \{ s_j : j \in \mathbb{N}^* \text{ et } \zeta(s_j) = 0\} \subset \mathbb{C}$,
$D = \{c_{jk} = (a_{jk}, b_{jk}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : \sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2} = p_j \in \mathcal{P}\}$,
$E = \{z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_k^2 + y_k^2 > 0\}$,

et les fonctions
$f : D \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $(c_{jk}, z_k) \mapsto (a_{jk} + i.b_{jk}).(x_k + i.y_k)$,
$pr1 : D \times E \longrightarrow D$,
$h : D \longrightarrow \mathcal{P}$ surjective, $c_{jk} \mapsto p_j = \sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}$,
$g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}, p_j \longmapsto s_j$.

Etude

On suppose que l'Hypothèse de Riemann est fausse alors $\exists$ j $\in\ \mathbb{N}^*$, $\exists\ s'_j\ \in \mathcal{S}$, $\exists\ \delta_j$ vérifiant $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$, $\exists\ t_j \in \mathbb{R}_+^*$ et $\exists$ $(\mathrm{a_{jm}}, \mathrm{b_{jm}}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tels que :

- $s'_j = (\frac{1}{2} + \delta_j) + \mathrm{i}.t_j$,
- $\zeta(s'_j) = 0$,
- $\mathrm{a_{jm}}^2 + \mathrm{b_{jm}}^2 = p_j^2$.

Mais $\zeta(s'_j) = 2^{s'_j}.\pi^{s'_j-1}.\sin(\frac{\pi s'_j}{2}).\Gamma(1-s'_j).\zeta(1-s'_j)$ avec $1-s'_j = (\frac{1}{2} - \delta_j) - \mathrm{i}.t_j$ et en vertu de la conjugaison des zéros alors :

- $\zeta(s''_j) = \zeta((\frac{1}{2} - \delta_j) + \mathrm{i}.t_j) = 0$,
- $\mathrm{a_{jn}}^2 + \mathrm{b_{jn}}^2 = p_j^2$ avec $(\mathrm{a_{jn}}, \mathrm{b_{jn}}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ (1)

Nous obtenons alors les systèmes :

$\mathrm{x_m}.\mathrm{a_{jm}} - \mathrm{y_m}.\mathrm{b_{jm}} = \frac{1}{2} + \delta_j$, (2)

$\mathrm{x_m}.\mathrm{b_{jm}} + \mathrm{y_m}.\mathrm{a_{jm}} = t_j$ (3)

et

$\mathrm{x_n}.\mathrm{a_{jn}} - \mathrm{y_n}.\mathrm{b_{jn}} = \frac{1}{2} - \delta_j$ (4)

$\mathrm{x_n}.\mathrm{b_{jn}} + \mathrm{y_n}.\mathrm{a_{jn}} = t_j$ (5)

avec $\mathrm{a_{jm}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{x_m} + t_j.\mathrm{y_m}}{\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2}$, $\mathrm{b_{jm}} = \frac{-\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{y_m} + t_j.\mathrm{x_m}}{\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2}$ et

$\mathrm{a_{jn}} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{x_n} + t_j.\mathrm{y_n}}{\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2}$, $\mathrm{b_{jn}} = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{y_n} + t_j.\mathrm{x_n}}{\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2}$.

1) Exploitation des données.

De (3) nous tirons $\mathrm{x_m} = \frac{t_j - \mathrm{y_m}.\mathrm{a_{jm}}}{\mathrm{b_{jm}}}$ et que nous reportons dans (2) d'où :

$t_j.\mathrm{a_{jm}} - \mathrm{y_m}.(\mathrm{a_{jm}}^2 + \mathrm{b_{jm}}^2) = (\frac{1}{2} + \delta_j).\mathrm{b_{jm}}$,

$t_j = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{b_{jm}}}{\mathrm{a_{jm}}} + \mathrm{y_m}.\frac{p_j^2}{\mathrm{a_{jm}}} = \mathrm{x_n}.\mathrm{b_{jn}} + \mathrm{y_n}.\mathrm{a_{jn}}$. (6)

De (5) nous tirons $\mathrm{x_n} = \frac{t_j - \mathrm{y_n}.\mathrm{a_{jn}}}{\mathrm{b_{jn}}}$ et que nous reportons dans (4) d'où :

$t_j = \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{b_{jn}}}{\mathrm{a_{jn}}} + \mathrm{y_n}.\frac{p_j^2}{\mathrm{a_{jn}}} = \mathrm{x_m}.\mathrm{b_{jm}} + \mathrm{y_m}.\mathrm{a_{jm}}$. (7)

(6) et (7) donnent $\frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{b_{jn}}}{\mathrm{a_{jn}}} + \mathrm{y_n}.\frac{p_j^2}{\mathrm{a_{jn}}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{b_{jm}}}{\mathrm{a_{jm}}} + \mathrm{y_m}.\frac{p_j^2}{\mathrm{a_{jm}}}$,

puis $\frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\mathrm{b_{jm}}}{\mathrm{a_{jm}}} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\mathrm{b_{jn}}}{\mathrm{a_{jn}}} = \mathrm{y_n}.\frac{p_j^2}{\mathrm{a_{jn}}} - \mathrm{y_m}.\frac{p_j^2}{\mathrm{a_{jm}}}$, et enfin $p_j^2 = \frac{(a_{jn}\, b_{jm} - a_{jm}\, b_{jn}) + 2.\delta_j.(a_{jn}\, b_{jm} + a_{jm}\, b_{jn})}{2(a_{jm}.y_n - a_{jn}\, y_m).}$ (8)

Comme $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$ alors $0 < 2.\delta_j < 1$ et (8) donne

$$\boldsymbol{p_j^2} < \frac{\mathbf{a_{jn}\, b_{jm}}}{(\mathbf{a_{jm}.y_n - a_{jn}.y_m})} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \qquad (9)$$

On remplace dans (9) a_{jm}, b_{jm} et a_{jn} par leurs expressions d'où :

$A = \frac{A'}{(x_m^2 + y_m^2).((x_n^2 + y_n^2)}$ où

$$A' = \left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n + t_j.y_n\right].\left[-\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).y_m + t_j.x_m\right]$$

$$A' = t_j^2.x_m.y_n + t_j.\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n.x_m - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).y_m.y_n\right] - \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right).x_n.y_m$$

$B = \frac{B'}{(x_m^2 + y_m^2).((x_n^2 + y_n^2)}$ où

$$B' = \left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_m.y_n + t_j.y_m.y_n\right].(x_n^2 + y_n^2) - \left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n.y_m + t_j.y_m.y_n\right].(x_m^2 + y_m^2)$$

Comme $x_m^2 + y_m^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}$ et $x_n^2 + y_n^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}$ alors B' devient :

$$B' = \left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_m.y_n + t_j.y_m.y_n\right].\left(\frac{\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}\right) - \left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n.y_m + t_j.y_m.y_n\right].\left(\frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2 + t_j^2}{p_j^2}\right)$$

et $\boldsymbol{p_j^2} < \frac{A}{B} = \frac{p_j^2.A'}{B''}$ avec

$$B'' = \left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_m.y_n + t_j.y_m.y_n\right].\left(\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 + t_j^2\right) - \left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n.y_m + t_j.y_m.y_n\right].\left(\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2 + t_j^2\right).$$

Alors (9) devient ($B'' < A' \Leftrightarrow 0 < A' - B''$).

Le développement de B'' donne :

$$B'' = \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2.x_m.y_n + \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).t_j^2.x_m.y_n + \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2.t_j.y_m.y_n - \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2.x_n.y_m - \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).t_j^2.x_n.y_m - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2.t_j.y_m.y_n,$$

$$B'' = \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right).\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_m.y_n - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_n.y_m\right] + t_j.y_m.y_n.\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right)^2\right] = -2.\delta_j.t_j.y_m.y_n + t_j^2.\left[\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_m.y_n - \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n.y_m\right].$$

Alors
$$A' - B'' = t_j^2.\left[-\left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_m.y_n + \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n.y_m + x_m.y_n\right] + + t_j.\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_n.x_m - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).y_m.y_n + 2.\delta_j.y_m.y_n\right] - \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right).\left[\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).x_m.y_n - \left(\frac{1}{2} + \delta_j\right).x_n.y_m + x_n.y_m\right]$$

$A' - B'' = \left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).t_j^2.(\mathrm{x_m.y_n + x_n.y_m}) + t_j.\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).(\mathrm{x_m.x_n - y_m.y_n}) -$
$\left(\frac{1}{2} - \delta_j\right).\left(\frac{1}{4} - {\delta_j}^2\right).(\mathrm{x_m.y_n - x_n.y_m})$.
(9) donne alors :
$\mathbf{0 < \boldsymbol{t_j^2}.(x_m.y_n + x_n.y_m) + \boldsymbol{t_j}.(x_m.x_n - y_m.y_n) - \left(\frac{1}{4} - \boldsymbol{\delta_j}^2\right).(x_m.y_n - x_n.y_m)}$ (10).

L'étude de cette inégalité amène à envisager 2 cas :

a) $\mathrm{x_m.y_n + x_n.y_m} = 0$,
b) $\mathrm{x_m.y_n + x_n.y_m} \neq 0$.

a) $\mathrm{x_m.y_n + x_n.y_m} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x_m.y_n} = -\mathrm{x_n.y_m}$ et
(10) $\Longrightarrow$ $\mathbf{0 < \boldsymbol{t_j}.(x_m.x_n - y_m.y_n) - \left(\frac{1}{4} - \boldsymbol{\delta_j}^2\right).2.x_m.y_n.}$
Et $\mathrm{x_m.y_n + x_n.y_m} = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{x_m.x_n - y_m.y_n = -\frac{y_m}{y_n}.((x_n{}^2 + y_n{}^2)}$

Il faut distinguer ici 3 éventualités :

α) $-\frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{y_n}}.((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) > 0$,
β) $-\frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{y_n}}.((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) < 0$,
γ) $-\frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{y_n}}.((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) = 0$.

α) $-\frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{y_n}}.((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{x_m.x_n} > \mathrm{y_m.y_n}$, il implique :
$\mathrm{y_m}$ et $\mathrm{y_n}$ de signes contraires donc $\mathrm{y_m.y_n} < 0$ et 2 possibilités
∗ $\mathrm{y_m} > 0$ et $\mathrm{y_n} < 0$
$\mathrm{x_m.(x_n.y_m)} = -\mathrm{x_m}^2.\mathrm{y_n} > \mathrm{y_m}^2.\mathrm{y_n} \Leftrightarrow 0 > \mathrm{y_n}.(\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2) \Longrightarrow (\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2) > 0$

∗ $\mathrm{y_n} > 0$ et $\mathrm{y_m} < 0$
$\mathrm{(x_m.y_n).x_n} = -\mathrm{x_n}^2.\mathrm{y_m} > \mathrm{y_n}^2.\mathrm{y_m} \Leftrightarrow 0 > \mathrm{y_m}.(\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) \Longrightarrow (\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) > 0$

β) $-\frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{y_n}}.((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{x_m.x_n} < \mathrm{y_m.y_n}$, il implique
$\mathrm{y_m}$ et $\mathrm{y_n}$ de même signe donc $\mathrm{y_m.y_n} > 0$ et 2 possibilités :
∗ $\mathrm{y_m} < 0$ et $\mathrm{y_n} < 0$
$\mathrm{(x_m.y_n).x_n} = -\mathrm{x_n}^2.\mathrm{y_m} > \mathrm{y_n}^2.\mathrm{y_m} \Leftrightarrow 0 > \mathrm{y_m}.(\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) \Longrightarrow (\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) > 0$
$\mathrm{x_m.(x_n.y_m)} = -\mathrm{x_m}^2.\mathrm{y_n} > \mathrm{y_m}^2.\mathrm{y_n} \Leftrightarrow 0 > \mathrm{y_n}.(\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2) \Longrightarrow (\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2) > 0$

∗ $\mathrm{y_m} > 0$ et $\mathrm{y_n} > 0$
$\mathrm{(x_m.y_n).x_n} = -\mathrm{x_n}^2.\mathrm{y_m} < \mathrm{y_n}^2.\mathrm{y_m} \Leftrightarrow 0 < \mathrm{y_m}.(\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) \Longrightarrow (\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) > 0$
$\mathrm{x_m.(x_n.y_m)} = -\mathrm{x_m}^2.\mathrm{y_n} < \mathrm{y_m}^2.\mathrm{y_n} \Leftrightarrow 0 < \mathrm{y_n}.(\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2) \Longrightarrow (\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2) > 0$

La contraposée des éventualités α) et β) impliquent que $-\frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{y_n}}.((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) = 0$.

γ) $-\frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{y_n}}.((\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) = 0$ induit :
$\mathrm{y_m} = 0$ car $(\mathrm{x_n}^2 + \mathrm{y_n}^2) \neq 0$,
$-\mathrm{x_n.y_m} = \mathrm{x_m.y_n} = 0$ d'où $\mathrm{y_n} = 0$ car $(\mathrm{x_m}^2 + \mathrm{y_m}^2) \neq 0$,

$x_m.x_n - 0 = \frac{0}{0}$,ce qui est impossible.

$\mathbf{x_m.y_n + x_n.y_m = 0 \implies x_m.x_n = \frac{0}{0}}$.

<u>Lemme 1</u> : $\mathbf{x_m.y_n + x_n.y_m \neq 0}$.

b) $x_m.y_n + x_n.y_m \neq 0$ et
$0 < t_j^2.(x_m.y_n + x_n.y_m) + t_j.(x_m.x_n - y_m.y_n) - \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right).(x_m.y_n - x_n.y_m)$.
$\boldsymbol{\Delta} = (\mathbf{x_m.x_n - y_m.y_n})^2 + (\mathbf{1 - 4.\boldsymbol{\delta}_j^{\,2}}).[(\mathbf{x_m.y_n})^2 - (\mathbf{x_n.y_m})^2]$.

2 cas possibles :

- $x_m.y_n + x_n.y_m < 0$
- $x_m.y_n + x_n.y_m > 0$.

- $x_m.y_n + x_n.y_m < 0$ implique :

a) $t_j.(y_m.y_n - x_m.x_n) + \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right).(x_m.y_n - x_n.y_m) < t_j^2.(x_m.y_n + x_n.y_m) < 0$
b) $x_m.y_n + x_n.y_m < 0$ (11)
c) $(y_m.y_n - x_m.x_n) < 0$ (12)
d) $(x_m.y_n - x_n.y_m) < 0$ (13)
(11) et (12) $\implies$ $y_n.(x_m + y_m) < x_n.(x_m - y_m)$
(12) et (13) $\implies$ $y_n.(x_m + y_m) < x_n.(x_m + y_m)$.

Il y a 2 possibilités :
$x_n.(x_m - y_m) < x_n.(x_m + y_m) \implies 0 < x_n.y_m$ (14)
ou
$x_n.(x_m + y_m) < x_n.(x_m - y_m) \implies x_n.y_m < 0$ (15)
(11) et (14) : $\mathbf{0 < x_n.y_m \implies x_m.y_n < 0}$
(15) : $x_n.y_m < 0$ et supposons que $x_m.y_n > 0$ alors
(13) donne $0 < x_m.y_n < x_n.y_m < 0$ contradiction.
Donc $\mathbf{x_n.y_m < 0 \implies x_m.y_n < 0}$.

(14) et (15) induisent donc $\mathbf{x_m.y_n < 0}$ et la contraposée conduit à $\mathbf{x_n.y_m = 0}$.
Or $x_n.y_m = \frac{\mathbf{(t_j - y_n.a_{jn}).(t_j - x_m.b_{jm})}}{\mathbf{a_{jm}.b_{jn}}}$
Et donc $(t_j - y_n.a_{jn}).(t_j - x_m.b_{jm}) = 0$
On pose $t_{j1} = x_m.b_{jm}$ et $t_{j2} = y_n.a_{jn}$
Mais $\boldsymbol{t_{j1}} = \mathbf{x_m.b_{jm}} \implies (y_m = 0$ et $0 < x_m.x_n)$
et $\boldsymbol{t_{j2}} = \mathbf{y_n.a_{jn}} \implies (x_n = 0$ et $y_m.y_n < 0)$
par identification respectivement de (3) et (5).

En remplaçant $y_m = 0$ dans (10) on obtient :
$- x_m.y_n.\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right)\right] < t_j.x_m.x_n$ avec $x_m.y_n < 0$ et $0 < x_m.x_n$
et comme $\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j^{\,2}\right)\right] < t_j^2$, il faut envisager 2 possibilités :
$* \; - x_m.y_n.t_j^2 < t_j.x_m.y_n \iff - x_m.y_n.t_j < x_m.x_n$ (16)
$* \; t_j.x_m.x_n < - x_m.y_n.t_j^2 \iff x_m.x_n < - x_m.y_n.t_j$ (17)

(16) : $0 < \mathrm{x_m}.(\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j})$ implique :

a) $\mathrm{x_m} > 0$ et $(\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j}) > 0 \implies (\mathrm{y_n} < 0, \mathrm{x_n} > 0$ et $\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} > 0)$

$\implies \mathrm{x_n} > -\mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} \implies \frac{\mathrm{x_n}}{-\mathrm{y_n}} > \mathrm{t_j}$.

b) $\mathrm{x_m} < 0$ et $(\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j}) < 0 \implies (\mathrm{y_n} > 0, \mathrm{x_n} < 0$ et $\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} < 0)$

$\implies \mathrm{x_n} < -\mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} \implies \frac{\mathrm{x_n}}{\mathrm{y_n}} < -\mathrm{t_j} \implies \mathrm{t_j} < -\frac{\mathrm{x_n}}{\mathrm{y_n}}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j} < -\frac{\mathbf{x_n}}{\mathbf{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{x_m} = \mathbf{0}$ d'où $\boldsymbol{t_{j1}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{0} < \mathbf{0}.\mathbf{x_n}$, ce qui est impossible.

(17) : $\mathrm{x_m}.(\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j}) < 0$ implique :

a) $\mathrm{x_m} > 0$ et $(\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j}) < 0 \implies (\mathrm{y_n} < 0$ et $\mathrm{x_n} < -\mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} > 0) \implies \mathrm{t_j} > -\frac{\mathrm{x_n}}{\mathrm{y_n}}$

b) $\mathrm{x_m} < 0$ et $(\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}.\mathrm{t_j}) > 0 \implies (\mathrm{y_n} > 0$ et $\mathrm{x_n} > -\mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} < 0) \implies \mathrm{t_j} > -\frac{\mathrm{x_n}}{\mathrm{y_n}}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j} > -\frac{\mathbf{x_n}}{\mathbf{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{x_m} = \mathbf{0}$ d'où $\boldsymbol{t_{j1}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{0} < \mathbf{0}.\mathbf{x_n}$, ce qui est impossible.

En remplaçant $\mathrm{x_n} = 0$ dans (10) on obtient :

. $\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} < \mathrm{x_m}.\mathrm{y_n}.\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right)\right]$ avec $\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} < 0$ et $\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n} < 0$

et comme $\left[t_j^2 - \left(\frac{1}{4} - \delta_j{}^2\right)\right] < t_j^2$, il faut envisager 2 possibilités :

$*$ $\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n}.t_j^2 < \mathrm{t_j}.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n} \iff \mathrm{x_m}.\mathrm{y_n}.\mathrm{t_j} < \mathrm{y_m}.\mathrm{y_n}$ (18)

$*$ $\mathrm{t_j}.\mathrm{y_m}.\mathrm{y_n} < \mathrm{x_m}.\mathrm{y_n}.t_j^2 \iff \mathrm{y_m}.\mathrm{y_n} < \mathrm{x_m}.\mathrm{y_n}.\mathrm{t_j}$ (19)

(18) : $\mathrm{y_n}.(\mathrm{x_m} - \mathrm{y_m}.\mathrm{t_j}) < 0$ implique :

a) $\mathrm{y_n} > 0$ et $(\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m}) < 0 \implies (\mathrm{x_m} < 0$ et $\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m} < 0)$

$\implies -\mathrm{y_m} < -\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} \implies \frac{-\mathrm{y_m}}{\mathrm{x_m}} < -\mathrm{t_j} \iff \mathrm{t_j} > \frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{x_m}}$

b) $\mathrm{y_n} < 0$ et $(\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m}) > 0 \implies (\mathrm{x_m} > 0$ et $\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m} > 0)$

$\implies \mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} > \mathrm{y_m} \implies \mathrm{t_j} > \frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{x_m}}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j} > \frac{\mathbf{x_n}}{\mathbf{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{y_n} = \mathbf{0}$ d'où $\boldsymbol{t_{j2}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{y_m}.\mathbf{0} < \mathbf{0}$, ce qui est impossible.

(19) : $0 < \mathrm{y_n}.(\mathrm{x_m} - \mathrm{y_m}.\mathrm{t_j})$ implique :

a) $\mathrm{y_n} > 0$ et $(\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m}) > 0 \implies (\mathrm{x_m} < 0$ et $\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m} > 0)$

$\implies \mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} > \mathrm{y_m} \implies \mathrm{t_j} < \frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{x_m}}$

b) $\mathrm{y_n} < 0$ et $(\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m}) < 0 \implies (\mathrm{x_m} > 0$ et $\mathrm{x_m}.\mathrm{t_j} - \mathrm{y_m} < 0)$

$\implies \mathrm{t_j} < \frac{\mathrm{y_m}}{\mathrm{x_m}}$

Donc a) et b) donnent tous les deux $\mathbf{t_j} < \frac{\mathbf{x_n}}{\mathbf{y_n}}$ et la contraposée induit que $\mathbf{y_n} = \mathbf{0}$ d'où $\boldsymbol{t_{j2}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{y_m}.\mathbf{0} < \mathbf{0}$, ce qui est impossible.

<u>Lemme 2</u> : $\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + \mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} < 0$ est impossible.

- $\mathrm{x_m}.\mathrm{y_n} + \mathrm{x_n}.\mathrm{y_m} > 0$.

$\boldsymbol{\Delta} = (\mathbf{x_m}.\mathbf{x_n} - \mathbf{y_m}.\mathbf{y_n})^2 + \left(\mathbf{1} - \mathbf{4}.\boldsymbol{\delta_j}{}^2\right).[(\mathbf{x_m}.\mathbf{y_n})^2 - (\mathbf{x_n}.\mathbf{y_m})^2] \geq \mathbf{0}$ car $t_j \in \mathbb{R}_+^*$.

α) $\Delta = 0 \implies t_j = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n)}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$.
On a donc $(x_m.x_n - y_m.y_n) \neq 0$ et $(x_m.y_n)^2 - (x_n.y_m)^2 < 0$ qui induisent $x_m.y_n + x_n.y_m > 0$ et $x_m.y_n - x_n.y_m < 0 \implies (x_m.x_n - y_m.y_n) < 0$.

Comme $t_j = x_m.b_{jm} + y_m.a_{jm} = x_n.b_{jn} + y_n.a_{jn}$ et que $t_j = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n)}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$ l'identification conduit à :
$a_{jm} = \frac{y_n}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_n}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$ et
$a_{jn} = \frac{y_m}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_m}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$.

Or ${a_{jm}}^2 + {b_{jm}}^2 = {a_{jn}}^2 + {b_{jn}}^2 = p_j^2$ et donc
$p_j^2 = \frac{{x_n}^2 + {y_n}^2}{4..(x_m.y_n + x_n.y_m)^2} = \frac{{x_m}^2 + {y_m}^2}{4..(x_m.y_n + x_n.y_m)^2}$ ce qui entraine que ${x_n}^2 + {y_n}^2 = {x_m}^2 + {y_m}^2$ qui n'est vrai que si $\delta_j = 0$.

Il s'ensuit que $\Delta \neq 0$.

β) $\Delta > 0 \implies t_j = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n) \pm \sqrt{\Delta}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$
$t_{j1} = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n) + \sqrt{\Delta}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$ et $t_{j2} = \frac{-(x_m.x_n - y_m.y_n) - \sqrt{\Delta}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)} > 0$,
$(x_m.x_n - y_m.y_n) < 0$,
$\sqrt{\Delta} < -(x_m.x_n - y_m.y_n)$.

Comme $t_j = x_m.b_{jm} + y_m.a_{jm} = x_n.b_{jn} + y_n.a_{jn}$ alors pour t_{j1}, on obtient
$a_{jm} = \frac{y_n}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_n - \frac{\sqrt{\Delta}}{x_{jm}}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$ et

$a_{jn} = \frac{y_m}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$, $b_{jm} = \frac{-x_m - \frac{\sqrt{\Delta}}{x_{jn}}}{2.(x_m.y_n + x_n.y_m)}$
et sachant que ${a_{jm}}^2 + {b_{jm}}^2 = {a_{jn}}^2 + {b_{jn}}^2 = p_j^2$ alors $(\frac{x_n^2 - x_m^2}{x_m.x_n}).(\frac{\Delta}{x_m.x_n} - 2.\sqrt{\Delta}) = 2.\frac{\delta_j}{p_j^2}$.
Le même traitement pour t_{j2} conduit à $(\frac{x_{jn}^2 - x_{jm}^2}{x_{jm}.x_{jn}}).(\frac{\Delta}{x_{jm}.x_{jn}} + 2.\sqrt{\Delta}) = 2.\frac{\delta_j}{p_j^2}$ induisant
$\frac{\Delta}{x_m.x_n} + 2.\sqrt{\Delta} = \frac{\Delta}{x_m.x_n} - 2.\sqrt{\Delta} \iff \sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta} \implies \Delta = 0 \implies \delta_j = 0$ en contradiction avec l'hypothèse $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$.
Ce résultat découle de $p_j^2 < \frac{a_{jn}\, b_{jm}}{(a_{jm}.y_n - a_{jn}\, y_m)}$ venant lui-même de l'application de l'hypothèse $0 < \delta_j < \frac{1}{2}$.

Lemme 3 : $\delta_j = 0$.

Conclusion.
L'exploitation des données conduit dans les 3 cas étudiés résultants de l'inégalité

$\boldsymbol{p_j^2} < \frac{\mathbf{a_{jn}\ b_{jm}}}{(\mathbf{a_{jm}.y_n - a_{jn}\ y_m})}$ à des contradictions avec les hypothèses de l'étude.
Le lemme 3 entraine alors

- $s_j' = s_j'' = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.t_j$,
- l'application $g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}, p_j \longmapsto s_{\mathrm{j}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.t_j$ est bijective.

Théorème : L'Hypothèse de Riemann est vérifiée.

madanibouabdallah@hotmail.fr.