

Properties of the Geometric Phases on Qbits

Propiedades de las Fases Geométricas en Qbits

Anthony Pinedo Araujo*

Grupo de Investigación de Física de la Universidad Nacional de Trujillo - Perú

Abstract

Since Berry demonstrated that the standard description of adiabatic processes in quantum mechanics was incomplete, geometric phases have been studied in many areas of physics. Both adiabatic and non-adiabatic phase are described in detail, with the mathematical background. Then we study the qbit, that is the principal unit of information of the quantum computation, and its representation on the Bloch sphere. Finally we find the general expression for geometric phases for qbits. Those final expression are in fact related to the solid angle enclosed in the circuit on the Bloch sphere.

Dese que Berry demostró que la descripción estándar de los procesos adiabáticos en la mecánica cuántica era incompleta, las fases geométricas han sido estudiadas en muchas áreas de la física. Se describen a detalle las fases geométricas adiabáticas y no adiabáticas, junto con la base matemática. Luego estudiaremos el qbit, que es la principal unidad de información de la computación cuántica, y su representación sobre la esfera de Bloch. Finalmente encontraremos la expresión general para las fases geométricas para los qbits. Estas expresiones final están, de hecho, relacionas con el ángulo sólido que encierra el circuito trazado sobre la esfera de Bloch

*apinedo@gifunt.com

1 Fases Geométricas en Procesos Adiabáticos

Para poder tratar la fase de Berry, se necesitará antes definir ciertos conceptos referente a la evolución adiabática de sistemas cuánticos, debido a que precisamente serán esos conceptos los que nos ayudarán a entender la fase de Berry, y las interpretaciones que se dieron acerca de la misma, siendo la más resaltante la interpretación de holonomía dada por Simon. Así, empecemos...

1.1 Aproximación Adiabática

Un concepto que debemos tener claro, antes de empezar todo esto, es el de *adabaticidad*, el cual ha jugado un rol muy importante en la física y toma en cuenta los efectos dinámicos, pero en el límite de los cambios infinitamente lentos; esto es, un sistema no estático, pero cuya evolución es “infinitamente lenta”. Una situación típica para esto, es cuando subdividimos a un sistema en dos, con escalas de tiempo muy diferentes, a los cuales se les llama *subsistema rápido* y *subsistema lento*. Esta subdivisión es muy usada en la física molecular [1].

A continuación veremos qué condiciones, del tipo matemáticas, se deben cumplir para considerar que la evolución de un sistema es adiabática.

Consideremos un hamiltoniano dependiente del tiempo $H = H(t)$. Por el momento asumamos que H tiene un espectro discreto y no degenerado. Luego podemos escribir:

$$H(t) |n(t)\rangle = E_n(t) |n(t)\rangle \text{ para todo } t \quad (1)$$

Obviamente, los autovectores dependientes del tiempo deben satisfacer:

$$\langle n(t) | m(t) \rangle = \delta_{nm} \quad (2)$$

Nótese que los autovectores $|n(t)\rangle$ no están definidos unívocamente, esto es:

$$|n(t)\rangle' = e^{\alpha(t)} |n(t)\rangle \quad (3)$$

Donde $\alpha(t)$ es el ángulo de fase, y es real. La base $|n(t)\rangle'$ constituye una base válida de autovectores del hamiltoniano así como $|n(t)\rangle$; así a la transformación (3) se le llama *transformación gauge*.

Ahora supongamos que, el estado inicial del sistema es un autovalor de $H(0)$:

$$|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle \quad (4)$$

Para algún n . Luego, la adiabaticidad nos dice que el hamiltoniano $H(t)$ cambia con el tiempo “muy lentamente”, entonces una buena aproximación sería:

$$|\psi(t)\rangle = e^{s(t)} |n(t)\rangle \quad (5)$$

Esto significa que, durante la evolución adiabática $|\psi(t)\rangle$ permanece en el n -ésimo autoestado de $H(t)$, aún cuando el autovalor $E_n(t)$ puede cambiar con el tiempo. Recordemos que, el estado de un sistema en un tiempo t puede ser descrito como una expansión ortonormal sobre la base $|n(t)\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) |m(t)\rangle \quad (6)$$

Reemplazando (6) en la ecuación de Schrödinger, se obtiene que los coeficientes $c_m(t)$ deben satisfacer que:

$$\sum_m \dot{c}_m(t) |m(t)\rangle + \sum_m c_m(t) |\dot{m}(t)\rangle = \frac{-i}{\hbar} \sum_m c_m(t) E_m(t) |m(t)\rangle \quad (7)$$

Donde el punto, denota la derivada temporal. Por otro lado, diferenciando la ecuación (1) tenemos:

$$\dot{H}(t) |n(t)\rangle + H(t) |\dot{n}(t)\rangle = \dot{E}_n(t) |n(t)\rangle + E_n(t) |\dot{n}(t)\rangle \quad (8)$$

Multiplicando (8) por $\langle k(t)|$ tenemos que:

$$\langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle = \frac{1}{E_n(t) - E_k(t)} \langle k(t)|\dot{H}(t)|n(t)\rangle \quad \text{para todo } n \neq k \quad (9)$$

Bien, a (7) le aplicamos la aproximación adiabática, esto es, que el sistema esté en un solo estado $|n(t)\rangle$ y multiplicando por $\langle k(t)|$, obtenemos:

$$\langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle \rightarrow 0 \quad \text{para todo } n \neq k \quad (10)$$

Luego es fácil notar que, de (10):

$$\langle k(t)|\dot{H}(t)|n(t)\rangle \rightarrow 0 \quad (11)$$

Estos dos últimos resultados son las que se toman en cuenta, para considerar si la evolución de un sistema sea adiabática, así pues, los resultados que obtendremos, en la que sigue de esta sección, serán válidos sólo para procesos donde (10) y (11) se cumplan.

1.2 Adiabaticidad y el Teorema Adiabático

En la sección anterior consideramos el caso especial donde el hamiltoniano $H(t)$, dependiente del tiempo, posee un espectro discreto y no degenerado E_n . Sin embargo, existe lo que se llama el *teorema del adiabático* [2], el cual funciona en situaciones más generales. También hablamos sobre los cambios lentos, pero para hablar de cambios lentos (en el tiempo) se necesita una escala de tiempo intrínseco para determinar qué significa rápido y lento. En la mecánica cuántica, tal escala, usualmente, se determina a través de las brechas de energía en el espectro.

Para formular el teorema adiabático, es conveniente, reemplazar el tiempo físico por la escala $s = \frac{t}{T}$. Donde T es la escala de tiempo asociada con la brecha. En esta nueva escala la ecuación de Schrödinger toma la forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial s} |\psi_T(s)\rangle = T \hat{H} |\psi_T(s)\rangle \quad (12)$$

El límite adiabático, o el límite de los *infinitamente lento* del Hamiltoniano corresponde al límite cuando $T \rightarrow \infty$. Supongamos que el espectro de $H(s)$ tiene ciertas regiones, y denotemos $P(s)$ el proyector, luego si empezamos la evolución temporal de nuestro sistema en una determinada parte del espectro, $|\psi_T(0)\rangle \in \text{Rango } P(0)$, el teorema adiabático, nos dice que el estado $|\psi_T(t)\rangle$, en un tiempo t , estará aún en la misma región inicial del espectro, con un error muy pequeño, el cual es controlado con la escala de tiempo T y el ancho de la brecha.

Para ser más exactos, y formales, construyamos el operador evolución unitario U_{AD} para la evolución adiabática. Luego, la evolución dinámica del operador proyector $P(s)$ será:

$$P(s) = U_{AD}(s)P(0)U_{AD}^{-1}(s)$$

Aquí es donde introducimos el llamado, *Hamiltoniano de Kato*(1958):

$$H_{kato}(s, P) = \frac{i\hbar}{T} \left[\frac{\partial}{\partial s} P(s), P(s) \right] \quad (13)$$

Así la ecuación de Schrödinger, para procesos adiabáticos, puede ser escrita como:

$$\dot{\psi}_{AD}(s) = \left[\frac{\partial}{\partial s} P(s), P(s) \right] \psi_{AD}(s) \quad (14)$$

Con la condición inicial $\psi_{AD}(0) \in \text{Rango } P(0)$. Nótese que si el espectro es no degenerado, la condición inicial es automáticamente satisfecha.

No es difícil demostrar que el operador evolución U_{AD} , satisface:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial s} U_{AD}(s) = T H_{kato}(s, P) U_{AD}(s) \quad (15)$$

Ahora estaremos en la capacidad de enunciar el *teorema adiabático*, el cual dice:

Sea $H(s)$ una familia de un parámetro suave del Hamiltoniano y sea $U_T(s)$ el operador evolución física parametrizada en la nueva escala de tiempo $s = \frac{t}{T}$, $U_T(s)$ el cual satisface:

$$i\hbar \dot{U}_T(s) = T H(s) U_T(s)$$

Y sea $P(s)$ una familia de proyectores sobre una banda del espectro separado por una brecha. Luego se cumple que:

$$U_T(s) P(0) U_T^{-1}(s) = P(s) + o(T^{-1}) \quad (16)$$

El término de error depende del tamaño de la brecha y de la escala de tiempo T .

Se ve claramente que, el límite adiabático será cuando $T \rightarrow \infty$, luego $U_T \rightarrow U_{AD}$.

1.3 Transporte Paralelo

En las aplicaciones físicas, la dependencia temporal entra en el Hamiltoniano como dependencia de algunos factores externos (potenciales, fuerzas, campos electromagnéticos, etc.). Supongamos que tales parámetros externos parametrizan alguna variedad M , así, tenemos una familia de sistemas parametrizados por puntos de M :

$$M \ni X \rightarrow H(X)$$

Denotemos por \mathcal{H} el espacio de Hilbert del sistema en cuestión. Tomamos el vector tangente M y proyectamos el sub-tangente $\mathcal{H} \times M$ cuyas fibras son los vectores:

$$F_x := \text{Rango} \subset P(X)$$

El fibrado tangente:

$$\mathcal{H}_p := \bigcup_{X \in M} F_X$$

Es el llamado *tangente espectral*. Notemos que la evolución adiabática generado por el Hamiltoniano de Kato puede ser interpretado geoméricamente.

De (15) se puede llegar a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} P\right)P = P^\perp P \quad (17)$$

$$P \frac{\partial}{\partial s} P = P \left(\frac{\partial}{\partial s} P^\perp\right) \quad (18)$$

Donde $P^\perp = I - P$ La ecuación de kato puede ser transformada como:

$$\frac{\partial}{\partial s} \psi = ((P^\perp) \left(\frac{\partial}{\partial s} P\right) P - P \left(\frac{\partial}{\partial s} P\right) P^\perp) \psi \quad (19)$$

Debido a que, si inicialmente $|\psi\rangle$ estaba sobre el rango de P , luego, de acuerdo al teorema adiabático, éste permanecerá sobre el rango de P después de empezar a evolucionar, lo cual es equivalente a que, $P^\perp \psi = 0$. Luego:

$$\partial_s \psi = P^\perp (\partial_s P) P \psi = P^\perp (\partial_s P) \psi \quad (20)$$

Como $P\psi = \psi$. Esto significa que $\partial_s \psi \in \text{Rango } P^\perp$ o equivalentemente $P\partial_s \psi = 0$. Esta condición puede reescribirse como:

$$Pd\psi = 0 \quad (21)$$

Donde d es la diferenciación exterior sobre M , esto es:

$$d\psi = \partial_s \psi ds = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial X^k} dX^k \quad (22)$$

Donde (X^1, \dots, X^n) son las coordenadas locales de M , y el operador:

$$\nabla := Pd \quad (23)$$

define la derivada covariante en el fibrado tangente \mathcal{H}_p , y es lineal (para los complejos), podemos usar la regla de Libnitz:

$$\nabla(f\psi) = (df)\psi + f\nabla\psi$$

Para $f \in C^\infty$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla(f\psi) &= Pd(f\psi) \\ &= P((df)\psi) + P(fd\psi) \\ &= (df)P\psi + fPd\psi \end{aligned} \quad (24)$$

Como $P\psi = \psi$, la evolución adiabática $\nabla\psi = 0$ define el transporte paralelo del vector $|\psi(s)\rangle$ en un fibrado tangente a lo largo de una curva en la base de la variedad M . Este transporte paralelo es realizado vía el operador de evolución adiabática U_{AD}

1.4 La Fase de Berry I: Caso No Degenerado

Para encontrar alguna fase geométrica en procesos cíclicos, necesitaremos definir ciertos conceptos matemáticos.

Consideremos la curva:

$$\ell : [0, T]t \rightarrow |\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$$

Con:

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$$

Donde \mathcal{H} es el espacio de Hilbert del sistema y satisface:

$$\ell(T) = |\psi(T)\rangle = e^{-i\zeta(T)} |\psi(0)\rangle \quad (25)$$

Lo anterior significa que estamos asumiendo que nuestro sistema evoluciona cíclicamente con un período T .

Resulta natural, creer que (25) puede ser escrito como:

$$|\psi(T)\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau) d\tau} |\psi(0)\rangle \quad (26)$$

Pero como fue demostrado por Berry [3], esto es incorrecto, y veamos el por qué.

Si la aproximación adiabática es cierta, entonces podemos expresar el vector estado $|\psi(t)\rangle$ de acuerdo a (6), entonces a (7) lo multiplicamos por $\langle n(t)|$, luego, los coeficientes c_n deben satisfacer:

$$\frac{d}{dt}c_n(t) = c_n\left(\frac{-i}{\hbar}E_n(t) + \langle n(t)|\frac{d}{dt}|n(t)\rangle\right) \quad (27)$$

La cual, si tomamos en cuenta que de acuerdo a (4), $c_n(0) = 1$, se obtiene fácilmente que:

$$c_n(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau} e^{i\gamma_n(t)} \quad (28)$$

Donde:

$$\gamma_n(t) = i \int \langle n(t)|\frac{d}{dt}|n(t)\rangle dt \quad (29)$$

Quizá usted empezará a sospechar que el factor $\gamma_n(t)$ tiene que ver con la fase geométrica, y que es el factor que hasta antes de Berry, se la había tomado poca importancia, esto, porque como veremos más adelante, se creía que tal fase podría ser eliminada a través una transformación gauge, pero sucede que no es tan fácil librarse de este factor!!!.

Para poder continuar, necesitaremos un poco más de definiciones matemáticas, y hacer ciertos cambios, en pro de visualizar el porqué a ese factor, al ser tomado en una evolución cíclica se le llama fase geométrica.

Consideremos una curva C sobre una variedad de parámetros externos M :

$$t \rightarrow X_t \in M$$

Y la evolución arbitraria del sistema, será descrita por el Hamiltoniano, que dependerá de tal parámetro $H = H(X)$ sobre la curva C . Así el Hamiltoniano depende del tiempo, solamente a través de la dependencia temporal de los parámetros externos, esto es:

$$H(t) \rightarrow H(X_t) \quad (30)$$

Supongamos que para algún $X_t \in M$ el Hamiltoniano tiene un espectro discreto, es decir:

$$H(X_t)|n(X_t)\rangle = E_n(X_t)|n(X_t)\rangle \quad (31)$$

En donde:

$$\langle n(X_t)|m(X_t)\rangle = \delta_{nm} \quad (32)$$

Asumimos además, que los autovectores $|n(X_t)\rangle$ son funciones univalueadas (como funciones de $X \in M$) esto es, asumimos la existencia del mapa:

$$M \ni X_t \rightarrow |n(X_t)\rangle \in \mathcal{H} \quad (33)$$

Donde \mathcal{H} es el espacio de Hilbert. Para hallar la evolución adiabática, se puede aplicar lo que se hizo antes, esto es: Sea $E(X)$ no degenerado y sea $P_n(X) = |n(X)\rangle\langle n(X)|$, el correspondiente proyector sobre el n -ésimo autoespacio $\mathcal{H}_n(X)$, podemos escribir:

$$\mathcal{H}_n(X_t) := \text{Rango} P_n(X_t) = \alpha |n(X_t)\rangle, \alpha \in \mathbf{C} \quad (34)$$

Nótese que los autovectores $|n(X_t)\rangle$ no están definidas unívocamente debido a que podemos hacer el gauge:

$$|n(X_t)\rangle \rightarrow |n(X_t)\rangle' = e^{i\alpha_n(X_t)} |n(X_t)\rangle \quad (35)$$

Donde $\alpha_n : M \rightarrow \mathbb{R}$. La ecuación anterior significa, topológicamente hablando, que si vamos de un parche $O_1 \subset M$ del espacio de parámetros a un parche nuevo $O_2 \subset M$ con diferente parametrización, luego, los autovalores de $H(X_t)$ en la región de intersección $X_t \in O_1 \cap O_2$ están relacionados por una transformación de fase de la forma (35).

Supongamos que $|\psi(0)\rangle = |n(X_0)\rangle$, luego de acuerdo a la condición de adiabaticidad, el vector estado $\psi(t)$ permanece en el n -ésimo autoespacio de $H(X_t)$ durante la evolución adiabática, esto es:

$$|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_n(X_t)$$

Luego, si la evolución es cíclica, esto es, cumpla la condición (25), sucede que, $|\psi(0)\rangle$ y $|\psi(T)\rangle$, ambos están sobre $\mathcal{H}_n(X_0)$ y ellos solo difieren por un factor de fase:

$$|\psi(T)\rangle = e^{s(T)} |\psi(0)\rangle \quad (36)$$

Antes de simplemente reemplazar (36) en la evolución cíclica, veamos ciertas propiedades de ese factor $e^{i\gamma_n(X_t)}$, para poder entender dos cosas, por qué se llama geométrica, e incluso topológica, y por qué se le había menospreciado por más de 50 años.

El factor $\gamma_n(X_t)$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\gamma_n(X_t) &= \int_0^t i \langle n(X_t) | \frac{d}{dt} |n(X_t)\rangle dt \\
&= \int_{X_0}^{X_t} i \langle n(X_t) | \frac{\partial}{\partial X_t^i} |n(X_t)\rangle dX_t^i \\
&= \int_{X_0}^{X_t} A_i^n(X_t) dX_t^i \\
&= \int_{X_0}^{X_t} A^n(X_t)
\end{aligned} \tag{37}$$

Donde, hemos definido:

$$A^n(X_t) = i \langle n(X_t) | d |n(X_t)\rangle \tag{38}$$

Este es el llamado vector potencial de Mead-Berry [3]. De (38), el vector potencial de Mead-Berry está definido solo en el caso de bases univaluadas de autovectores $|n(X_t)\rangle$ de $H(X_t)$, y además es una base suave, que esta definida solo localmente. Esto implica que la curva C está solo en un parche sobre el cual existen un conjunto de bases univaluadas $|n(X_t)\rangle$. Así pues, el potencial de Mead-Berry, puede ser expresado como una diferencial local de uno-forma:

$$A^n = (X_t) = A_i^n(X_t) dX_t^i = i \langle n(X_t) | \frac{\partial}{\partial X_t^i} |n(X_t)\rangle dX_t^i = i \langle n(X_t) | d |n(X_t)\rangle \tag{39}$$

Aquí, los diferenciales dX_t^i con $i = 1, 2, \dots, \mu$ con $\mu = \dim(M)$ son las bases diferenciales de uno-forma (vectores covariantes), y “d” es el operador de derivación exterior. La uno-forma A^n es llamada la *conexión uno-forma de Mead-Berry*. Y gracias a ello, el ángulo de fase $\gamma_n(X)$ puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}
\gamma_n(X) &= \int_{X_0}^{X_t} i \langle n(X_t) | d |n(X_t)\rangle \\
&= \int_C A^n
\end{aligned} \tag{40}$$

Donde C es la curva trazada por el parámetro X_t sobre el espacio de parámetros M .

Volviendo a nuestro cálculo de $|\psi(t)\rangle$ obtenemos:

$$|\psi(t)\rangle \xrightarrow{\text{adiabatico}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau} e^{i\gamma_n(X_t)} |n(X_t)\rangle \tag{41}$$

Esta ecuación muestra que, en adición a la fase dinámica, hay otra fase $e^{i\gamma_n(X_t)}$ el cual está dada en función a los autovectores $|n(X_t)\rangle$ de $H(X_t)$. Esta es la expresión completa para la evolución adiabática de un sistema cuántico. Nótese que el factor $\gamma_n(t)$ había sido ignorado por más de medio siglo, a pesar que Fock (1922) había considerado su existencia, pero a través de una transformación gauge había hecho que tal factor se iguale a la identidad. A continuación veremos como hacer lo que Fock hizo, y también veremos por qué es que Fock estaba errado.

De la definición del vector potencial de Mead-Berry, realizando una transformación gauge:

$$\begin{aligned}
A^n(X_t) \rightarrow A'^n(X_t) &= i \langle n(X_t) | \nabla | n(X_t) \rangle \\
&= i \langle n(X_t) | e^{-i\alpha_n(X_t)} (\nabla e^{i\alpha_n(X_t)} | n(X_t) \rangle) \\
&= i \langle n(X_t) | \nabla | n(X_t) \rangle + i e^{-i\alpha_n(X_t)} (e^{i\alpha_n(X_t)}) \\
&= A^n(X_t) - \nabla \alpha_n(X_t)
\end{aligned} \tag{42}$$

Alternativamente tenemos para la conexión uno-forma:

$$A^n(X_t) \rightarrow A'^n(X_t) = A^n(X) - d\alpha_n(X) \tag{43}$$

De (43), bajo una transformación gauge, el ángulo de fase $\gamma_n(t)$ se transforma de acuerdo a:

$$\begin{aligned}
\gamma_n(X_t) \rightarrow \gamma'_n(X_t) &= A'^n(X_t) \\
&= \gamma_n(X_t) - \alpha(X_t) + \alpha_n(X_0)
\end{aligned} \tag{44}$$

Si ahora, hacemos los cálculos de (41), usando $|n(X)\rangle'$ en vez de $|n(X_t)\rangle$, obtenemos:

$$e^{i\gamma'_n(X)} |n(X)\rangle' = e^{i\gamma'_n(X)} e^{i\alpha_n(X)} |n(X)\rangle \tag{45}$$

Aquí es donde, intentaremos hacer una trampa, y decimos que, para simplificar las cosas, si $\alpha_n(X_t)$ es una función univaluada arbitraria de módulo 2π , entonces podemos elegirla de forma que el factor de fase $e^{i\gamma_n(X_t)'} e^{i\alpha_n(X_t)}$ se haga igual a la unidad y así encontramos que en vez de (41) podemos escribir:

$$\psi(t) = e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau} |n(X_t)\rangle \tag{46}$$

Debido a que $|n(X_t)\rangle'$ es una base de autovectores igual de válida que $|n(X_t)\rangle$, podemos usarla para describir la evolución temporal del vector estado, y esto nos lleva a tomar en cuenta solo el factor dinámico. A este resultado había llegado Fock, pero se olvidó de un pequeño detalle.

Por muy lindo que suene lo dicho anteriormente, existe una ligadura que nos impedirá elegir $\alpha_n(X)$ como queramos. Notemos que tenemos la condición de que después de un periodo T los parámetros externos, volverán a sus valores iniciales tal como fue descrita por la curva C , luego no podemos elegir $\alpha_n(X_t)$ libremente para eliminar $\gamma_n(X_t)$.

Sabemos que para evoluciones cíclicas, $X_T = X_0$ y además como el factor $e^{i\alpha_n(X_t)}$ es univaluado, cumple que:

$$e^{i\alpha_n(X_T)} = e^{i\alpha_n(X_0)} \quad (47)$$

Lo cual lleva a:

$$\alpha_n(X_T) = \alpha_n(X_0) + 2n\pi \quad (48)$$

Luego haciendo el gauge respectivo:

$$\begin{aligned} \gamma_n(X_T) \rightarrow \gamma_n' &= \oint_C A_i'^n(X_t) dX_t^i \\ &= \oint_C A_i^n(X_t) dX_t^i - 2\pi n \\ &= \gamma_n(X_T) - 2\pi n \end{aligned} \quad (49)$$

Luego, $\gamma_n(T)$, el cual puede ser definido en módulo 2π , es un invariante ante la transformación de gauge y no puede ser removido. Así tenemos:

$$|\psi(T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau) d\tau + i\gamma_n(X_T)} |n(X_t)\rangle \quad (50)$$

Como $\gamma_n(X_T)$ está dada por la integral cerrada sobre la curva C , tenemos que podemos expresarla como $\gamma_n(C)$ en módulo 2π . Así, si insertamos la condición (4) tenemos que finalmente que el vector estado, luego de una evolución cíclica de período T , será:

$$|\psi(T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau) d\tau + i\gamma_n(C)} |\psi(0)\rangle \quad (51)$$

El ángulo de fase $\gamma_n(C)$ es el llamado ángulo de fase de Berry y $e^{i\gamma_n(C)}$ es llamado el factor de fase de Berry.

De (42), notamos que el potencial de Mead-Berry, satisface la misma transformación gauge que para el potencial electromagnético, es más si el espacio de parámetros es tridimensional y además el parámetro X_t es también tridimensional $X = (X^1, X^2, X^3)$, luego, tenemos una analogía completa con la electrodinámica, sin embargo los significados de estas cantidades asociadas a la fase de Berry tienen significados diferentes. Nótese que el potencial gauge (38) nada tiene que ver con electromagnetismo.

Siguiendo con la analogía con electrodinámica, definimos un tensor de campo F^n con las componentes:

$$F_{ij}^n := \frac{\partial}{\partial X_t^i} A_j^n - \frac{\partial}{\partial X_t^j} A_i^n, i, j = 1, 2, \dots, \tau \quad (52)$$

Esto es, un tensor de campo antisimétrico contravariante de rango dos. Así le obtenemos su diferencial dos-forma:

$$\begin{aligned} F^n &= \frac{1}{2} F_{ij}^n dX_t^i \wedge dX_t^j \\ &= \frac{\partial A_j^n}{\partial X_t^i} dX_t^i \wedge dX_t^j \\ &= dA^n \end{aligned} \quad (53)$$

La dos-forma F^n , con A^n dado en (53) es llamada la *curvatura de Mead-Berry de dos-forma*, y está dado por:

$$\begin{aligned} F^n &= d(i \langle n(X_t) | d | n(X_t) \rangle) \\ &= i(d \langle n(X_t) | \wedge d | n(X_t) \rangle) \end{aligned} \quad (54)$$

Una propiedad importante de esta curvatura, es que contrariamente a la conexión uno-forma, esta si es un invariante gauge, esto se deduce directamente de (53), y de la identidad $d^2 = 0$.

$$F^n \rightarrow F'^n = dA'^n = dA^n - d^2 \alpha = dA^n = F^n \quad (55)$$

La invariancia gauge de F^n tiene dos consecuencias importantes: F^n es un objeto definido globalmente sobre M , y podría ser usado para la fase de Berry. Para poder hacerlo, asumimos que la curva C rodea la superficie $S \subset M$, y usando el teorema de stokes convertimos la integral cerrada en una integral de superficie:

$$\gamma_n(C) = \oint_C A^n = \int_S dA^n = \int_S F^n \text{ mod } 2\pi \quad (56)$$

La superficie S puede ser elegida arbitrariamente, tal que $\partial S = C$.

Para ver que es lo que pasa cuando la energía se degenera para ciertos valores del parámetro usemos una base completa $|m(X)\rangle$ completa, y así podemos escribir (2.59) como:

$$\begin{aligned}
F^n &= i \sum_m [(d\langle n(X_t)|) |m(X_t)\rangle] \wedge [\langle m(X_t)| d|n(X_t)\rangle] \\
&= -i \sum_m [\langle n(X_t)| d|m(X_t)\rangle] \wedge [\langle m(X_t)| d|n(X_t)\rangle] \\
&= -i \sum_{m \neq n} [\langle m(X_t)| d|n(X_t)\rangle] \wedge [\langle n(X_t)| d|m(X_t)\rangle] \quad (57)
\end{aligned}$$

Así usando (2.9) tenemos que:

$$F^n = i \frac{\sum \langle n(X_t)| [dH(X_t)] |m(X_t)\rangle \wedge \langle m(X_t)| [dH(X_t)] |n(X_t)\rangle}{[E_n(X_t) - E_m(X_t)]} \quad (58)$$

Nótese que (57) no depende de los vectores bas $|n(X_t)\rangle$ del factor de fase, contrariamente a la conexión uno-forma (38) el cual está expresado en términos de $|n(X_t)\rangle$, el cual se asume suave y univaluada, y era definida solo sobre un parche del espacio de parámetros, la curvatura de dos-forma (57) está definida globalmente sobre M . Así, (57) y (58) pueden ser usados para hallar la fase geométrica incluso para casos en donde la curva C está en una región del espacio de parámetros donde no existen $|n(X_t)\rangle$ suave y univaluada.

La fórmula (57) muestra que F^n se vuelve singular para $X = X_0$ donde los autovalores son degenerados para $E_n(X_0) = E_m(X_0)$.

Como vimos, la fase de Berry $\gamma_n(C)$ no es sensible a los detalles de la dinámica del sistema cuántico, esta depende de la curva C (con la condición de adiabaticidad) y por lo tanto es una cantidad geométrica. Luego podemos decir que la fase de Berry es la *fase geométrica adiabática*

1.5 La Fase de Berry II: Caso Degenerado

En las secciones anteriores acerca de las fases adiabáticas, se supuso que tales sistemas, pues satisfagan ciertas condiciones, como que el Hamiltoniano $H = H(X_t)$ dependa suavemente de los parámetros X y además que los autovalores $E_n(X_t)$ sean no degenerados. Tales exigencias, tuvieron implicancias directas sobre la fase adiabática; una manifestación

clara del mismo es que según (58), donde la no degeneración del autovalor de la energía $E_n(X_t)$ permite que el término de la derecha se mantenga finito. Por las razones expuestas arriba, resulta necesario, encontrar una fase geométrica para el caso degenerado, y es por eso que debemos expandir el tratamiento que hizo Berry [3] en su trabajo inicial.

Para lograr llegar a tal expresión, consideremos un autovalor E_n del Hamiltoniano $H(X)$ el cual es \mathcal{N} -fold degenerado. Supongamos que \mathcal{N} no depende del parámetro X . Dígase que, como $X = X_t$ varía en el tiempo, \mathcal{N} permanece constante. En particular, asumamos que durante la evolución no hay *crossing*¹. Alternativamente exigimos que, los subespacios degenerados \mathcal{H}_n y \mathcal{H}_m correspondientes a dos distintos autovalores para las energías E_n y E_m no se intersectan.

Bajo estas condiciones, podemos generalizar los resultados de la sección anterior, pero para este caso, la evolución adiabática del sistema cuántico, significa que dado un vector del autoestado de la energía $|n(X_0)\rangle \in \mathcal{H}_n(X_0)$ evoluciona en el tiempo de tal forma que en todo momento del tiempo $t \in [0, T]$ éste permanece en un vector del autoestado de $H(X_t)$, esto significa que es un elemento de $\mathcal{H}_n(X_0)$. En particular si el hamiltoniano es periódico $H(X_T) = H(X_0)$, tenemos que después de cada ciclo, el autovector retorna al mismo autoespacio degenerado inicial $\mathcal{H}_n(X_0)$.

Llevándolo el operador proyector a la representación de interés tenemos:

$$P_n(X_t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} |n^j(X_t)\rangle \langle n^j(X_t)| \quad (59)$$

Los vectores $|n^j(X_t)\rangle$ son definidos solo localmente ($X_t \in U \subset M$), y satisfacen que:

$$\langle n^j(X_t) | m^k(X_t) \rangle = \delta_{nm} \delta_{jk} \quad (60)$$

Luego, para cada valor de n , los autovectores $|n^j(X_t)\rangle$ nos dan una base ortonormal para el subespacio degenerado \mathcal{H}_n . Nótese que, así como

¹esto significa que si $E_n(X_0) \neq E_m(X_0)$ para algún $X_t \in M$, luego requerimos que $E_n(X) \neq E_m(X_t)$ para todo $X \in M$

vimos antes, $|n^j(X_t)\rangle'$ y $|n^j(X_t)\rangle$ están relacionadas por:

$$|n^j(X_t)\rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} |n^k(X_t)\rangle \mathcal{U}^{kj}(X_t) \quad (61)$$

Donde $\mathcal{U}^{jk}(X_t)$ son los elementos de matriz de una matriz unitaria $\mathcal{U}(X)$ de tamaño $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Es fácil ver que, $|n^j(X_t)\rangle'$ forma una base ortonormal de $\mathcal{H}_n(X_t)$ y que ambos $|n^j(X_t)\rangle'$ y $|n^j(X)\rangle$ definen el mismo proyector:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} |n^j(X_t)\rangle' \langle n^j(X_t)|' \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} |n^j(X_t)\rangle \langle n^j(X_t)| = \Lambda_n(X_t) \quad (62)$$

Ahora, dado un conjunto de autovectores base $|n^j(X)\rangle$, podemos definir el frame:

$$s^n(X_t) \rightarrow s'^n(X_t) \mathcal{U}(X_t) \quad (63)$$

Consideremos nuevamente un sistema cuántico con una evolución periódica cuya dependencia temporal es descrita por una curva cerrada C en el espacio de parámetros M esto es $H(t) = H(X_t)$ con $X_t \in C$. De acuerdo a la aproximación adiabática, para un vector estado inicial $|\psi(0)\rangle = |n^j(X_t)\rangle$ (para algun valor de n y j), bajo una evolución cíclica, este vector estado retorna al mismo subespacio degenerado $\mathcal{H}_n(X_0)$. Esto, implica, en general, que el vector estado resultante $|\psi(t=T)\rangle$ (que satisface la ecuación de Schrödinger), está relacionado con el vector estado inicial a través de la acción de una matriz unitaria:

$$|\psi(T)\rangle = |\psi(0)\rangle \mathcal{U}_\psi \quad (64)$$

Esto se puede ver fácilmente, si recordamos que los vectores estados iniciales y finales, están normalizados, y son parte de un mismo subespacio de Hilbert \mathcal{N} -dimensional $\mathcal{H}_n(X_0)$.

La matriz unitaria $\mathcal{U}_\psi \in \mathcal{U}(\mathcal{N})$ es la generalización de la fase total $e^{-i\alpha_\psi}$ visto en la sección anterior. De acuerdo al teorema del adiabático, si el vector estado inicial $|\psi(0)\rangle$ esta en un autoespacio de energías $\mathcal{H}_n(X_0)$, luego, en cualquier tiempo después $t \geq 0$, $|\psi(t)\rangle$ permanecerá sobre $\mathcal{H}_n(X_T)$. Elijamos un vector estado inicial:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} c_j^n(0) |n^j(X_0)\rangle \quad (65)$$

Luego, podemos ver que:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} c_j^n(t) |n^j(X_t)\rangle \quad (66)$$

Para resolver la ecuación de Schrödinger, es análogo a cómo se resolvió para el caso no degenerado, por lo que iremos directamente a la ecuación diferencial resultante, luego de reemplazar (66):

$$\frac{dc_k^n(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \left[iE_n(X_t)\delta_{jk} + \left\langle n^k(X_t) \left| \frac{d}{dt} \right| n^j(X_t) \right\rangle \right] c_j^n = 0 \quad (67)$$

Cuya solución general es:

$$c_k^n(t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \left[\overleftarrow{\mathcal{T}} \exp \int_0^t (-iE_n X_\tau) \mathbf{1} d\tau + iA_{\mathcal{N}}^n(X_\tau) \right]^{kj} c_j^n(0) \quad (68)$$

Donde $\mathbf{1}$ es la matriz $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, y $\overleftarrow{\mathcal{T}}$ es el operador de ordenamiento temporal, y $A_{\mathcal{N}}^n$ es el análogo no abeliano de la conexión de Berry de uno-forma. Éste está definido en términos de sus elementos de matriz:

$$\begin{aligned} [A_{\mathcal{N}}^n]^{kj}(R(\tau)) &= i \left\langle n^k(X_\tau) \left| \frac{d}{dt} \right| n^j(X_\tau) \right\rangle d\tau \\ &= i \left\langle n^k(X) \left| d \right| n^j(X) \right\rangle \end{aligned} \quad (69)$$

La ecuación anterior, puede ser simplificada, si notamos que el primer término del integrando conmuta con todas las matrices. Luego, podríamos sacarla fuera del operador de ordenamiento temporal. En los términos restantes, podemos suprimir la dependencia directa del tiempo y cambiar la integración sobre el tiempo, y hacerla sobre el espacio de parámetros $X \in \mathbf{C}$. De esta manera podemos, además, reemplazar $\overleftarrow{\mathcal{T}}$ por el “operador de ordenamiento de caminos” $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Así el resultado final será:

$$c_k^n(t) = e^{-i \int_0^t E_n(X_\tau) d\tau} \sum_j \left[\overleftarrow{\mathcal{P}} \exp \left(i \int_{X_0}^{X_t} A_{\mathcal{N}}^n(X) \right) \right]^{kj} c_j^n(0) \quad (70)$$

En vista de (66), tenemos:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}} |n^k(X_0)\rangle e^{-i \int_0^t E_n(X_\tau) d\tau} \left[\overleftarrow{\mathcal{P}} \exp \left(i \int_{X_0}^{X_t} A_{\mathcal{N}}^n(X) \right) \right]^{kj} c_j^n(0) \quad (71)$$

Luego de un ciclo completo (t=T) tenemos:

$$|\psi(T)\rangle = \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}} |n^k(X_0)\rangle e^{-i \int_0^T E_n(X_t) dt} \left[\overleftarrow{\mathcal{P}} \exp \left(i \oint A_{\mathcal{N}}^n \right) \right]^{kj} c_j^n(0) \quad (72)$$

Si escogemos que el vector estado inicial $|\psi(0)\rangle$ sea uno de los vectores base, luego todos los c_j^n se anulan excepto uno, el cual se hace igual a 1: $|\psi(0)\rangle = |n^j(X_0)\rangle = |\psi_a(t)\rangle$. para este caso, el vector estado evolucionará de acuerdo a:

$$|\psi_j(t)\rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} |n^k(X_0)\rangle e^{-i \int_0^t E_n(X_\tau) d\tau} \left[\overleftarrow{\mathcal{P}exp} \left(i \int_{X_0}^{X_t} A_{\mathcal{N}}^n(X) \right) \right]^{kj} \quad (73)$$

Evaluando para un periodo completo, $t = T$, encontramos:

$$|\psi_j(T)\rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} |n^k(X_0)\rangle e^{-i \int_0^T E_n(X_t) dt} \left[\overleftarrow{\mathcal{P}exp} \left(i \oint A_{\mathcal{N}}^n \right) \right]^{kj} \quad (74)$$

Afortunadamente, se definió la matriz unitaria \mathcal{U}^{jk} que transforma la base de autovectores en otra:

$$|n^j(X_t)\rangle = |n^k(X_t)\rangle \mathcal{U}^{kj}(X_t) \quad (75)$$

Usamos, (64), empleando la condición inicial de que $\psi^n(t = 0) = s^n(X_0)$, y obtenemos:

$$\begin{aligned} \psi^n(t) &= (|\psi_1(t)\rangle, \dots, |\psi_{\mathcal{N}}(t)\rangle) \\ &= \psi^n(0) \cdot e^{-i \int_0^t E_n(X_\tau) d\tau} \left[\overleftarrow{\mathcal{P}exp} \left(i \int_{X_0}^{X(t)} A_{\mathcal{N}}^n(X) \right) \right] \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \psi^n(T) &= (|\psi_1(T)\rangle, \dots, |\psi_{\mathcal{N}}(T)\rangle) \\ &= \psi^n(0) \cdot e^{-i \int_0^T E_n(X_t) dt} \left[\overleftarrow{\mathcal{P}exp} \left(i \oint A_{\mathcal{N}}^n \right) \right] \end{aligned} \quad (77)$$

Ahora, llegamos a nuestro objetivo de esta sección, pues de la ecuación anterior, se puede notar que el primer exponencial, es el conocido factor de *fase dinámica*. Luego, tenemos, que la generalización para la fase no abeliana de Berry, es:

$$\overleftarrow{\mathcal{P}exp} \left(i \oint A_{\mathcal{N}}^n \right) \quad (78)$$

Estos resultados obtenidos, tanto para el caso no degenerado como en el degenerado, se le conoce como *holonomía* de un fibrado tangente. En fin, ésta sería una propiedad general de cualquier sistema al cual se le asocia una variedad M sobre el cual se puede representar la evolución del mismo, pues dentro de esta variedad, en un proceso cíclico se generará una holonomía² como consecuencia de la geometría de la variedad. Es por

²la fase geométrica

eso que se pueden encontrar fases geométricas en muchos más procesos, incluyendo en casos clásicos.

2 Fases Geométricas en Procesos no Adiabáticos

En la sección anterior se hizo todo el tratamiento respectivo para las fases para el caso adiabático, pero ese no es el caso más general, pues fue demostrado por Aharonov y Anandan [4], que la fase geométrica es una propiedad general para cualquier sistema cuántico que evolucione cíclicamente, en donde la fase de Berry solo es un caso particular.

2.1 Fase de Aharonov-Anandan: Caso no Degenerado

En general, consideremos un Hamiltoniano dependiente del tiempo $H(t) = H(X_t)$, cuya dependencia temporal está dada por la dada por la curva C trazada sobre el espacio de parámetros M

$$C : R(0) \rightarrow R(t) \rightarrow R(\tau) \quad (79)$$

La evolución de todo estado físico puro define una curva sobre el espacio $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ de todos los estados. En particular, para estado cíclico, el operador densidad $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ con periodo τ correspondiente a la curva cerrada en $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ es:

$$\mathcal{C} : \rho(0) \rightarrow \rho(t) \rightarrow \rho(\tau) = \rho(0) \quad (80)$$

Consideremos una evolución cíclica arbitraria con periodo τ . Luego asociamos con la correspondiente curva \mathcal{C} en $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, tres curvas en el espacio de Hilbert:

1. La curva

$$C : |\psi(0)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(\tau)\rangle \rightarrow e^{-i\alpha\psi} |\psi(0)\rangle \quad (81)$$

Donde $|\psi(t)\rangle$ es la solución de la ecuación de Schrödinger con la condición inicial del vector estado $|\psi(0)\rangle$ tenga una evolución cíclica

2. La curva cerrada

$$C^{cerrada} : |\phi(X_t)\rangle \rightarrow |\phi(X_t)\rangle \rightarrow |\phi(X_T)\rangle = |\phi(X_0)\rangle \quad (82)$$

Donde $|\phi(X)\rangle$ es una función suave y univaluada con valores en \mathcal{H} que tienen la propiedad $\rho(t) = |\phi(X_t)\rangle\langle\phi(X_t)|$. Y además, $|\phi(X)\rangle$ es determinado por la transformación gauge:

$$|\phi(X_t)\rangle \rightarrow |\phi'(X_t)\rangle = e^{i\zeta(X_t)}|\phi(X_t)\rangle \quad (83)$$

$$e^{i\zeta(X_\tau)} = e^{i\zeta(X_0)} \quad (84)$$

3. La curva:

$$\tilde{C} : |\tilde{\psi}(0)\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}(t)\rangle := e^{i \int_0^t \langle\psi(t')|h(t')|\psi(t')\rangle} |\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(\tau)\rangle \quad (85)$$

donde $|\psi(t)\rangle$ es la solución de la ecuación de Schrödinger.

Estas tres curvas C , $C^{cerrada}$ y \tilde{C} tienen la propiedad que bajo la proyección de \mathcal{H} sobre $\mathcal{P}(H)$ (vectores estado a estados); ellos proyectan sobre la curva cerrada \mathcal{C} .

$$|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = |\varphi(t)\rangle\langle\varphi(t)| = \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle \left\langle \tilde{\psi}(t) \right| = W(t) \in \mathcal{P}(H) \quad (86)$$

Por esta razón es que se les llama *lifts*³ de \mathcal{C} . En la fig(1) se puede apreciar una ilustración simpática de este detalle. Las curvas C , $C^{cerrada}$ y \tilde{C} serán llamadas *lifts dinámicos*, el *lift cerrado* y el *lift de Aharonov Anandan* de la curva \mathcal{C} respectivamente.

En general $C^{cerrado}$ son curvas de *sección local*⁴:

$$|\phi\rangle : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{H}$$

Debido a que $t \rightarrow |\psi(t)\rangle$, $t \rightarrow \left| \tilde{\psi}(t) \right\rangle$ y para algún $t \rightarrow |\phi(t)\rangle$ son lifts cerrados de la misma curva $t \rightarrow \rho(t)$ debe existir un factor de fase $\omega(t)$ tal que:

³se deja con la palabra original del inglés, porque al traducirlo sería algo como *elevador*

⁴una sección local es una función suave de un parche abierto de $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ en \mathcal{H}

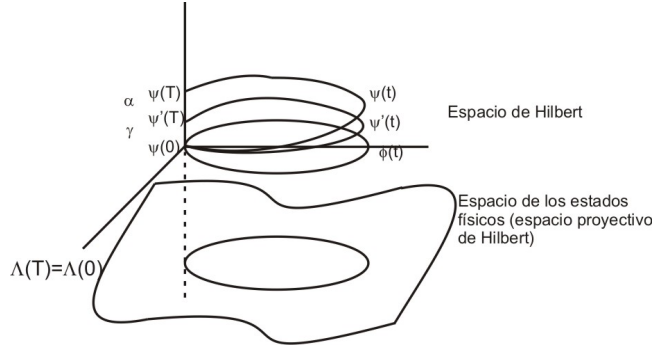


Figure 1: Curvas cerradas sobre el espacio de los estados físicos y los lifts

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \omega(t) |\phi(t)\rangle \quad (87)$$

Luego se calcula $\omega(t)$, para esto diferenciando (87), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \frac{d\omega(t)}{dt} |\phi(t)\rangle + \omega(t) \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle \quad (88)$$

Tomando el producto escalar de la última expresión con $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, se obtiene:

$$\omega(t) \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega^2(t) \langle \phi(t) | \left(\frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle \right) = \langle \tilde{\psi}(t) | \left(\frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle \right) = 0 \quad (89)$$

Sólo reordenando esta expresión se tiene:

$$\frac{1}{\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} = - \langle \phi(t) | \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle \quad (90)$$

El cual puede integrarse fácilmente, obteniendo:

$$\frac{\omega(t)}{\omega(0)} = e^{-\int_0^t \langle \phi(t') | \frac{d}{dt'} |\phi(t')\rangle dt'} \quad (91)$$

Se denotará ese último factor de fase de (91) por $e^{i\gamma(t)}$, y podemos tener que:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \omega(0) e^{i\int_0^t \langle \phi(t') | \frac{d}{dt'} |\phi(t')\rangle dt'} |\phi(t)\rangle = \omega(0) e^{i\gamma(t)} |\phi(t)\rangle \quad (92)$$

Escogiendo $\omega(0) = 1$, se tiene:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i\gamma(t)} |\phi(t)\rangle \quad (93)$$

Combinando (85) y (93), se encuentra:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \int_0^t \langle \psi(t') | H(t') | \psi(t') \rangle dt'} e^{i\gamma(t)} |\phi(t)\rangle \quad (94)$$

La ecuación (94) es la relación general entre la solución de la ecuación de Schrödinger $|\psi(t)\rangle$ y el lift cerrado $|\phi(t)\rangle$. En el caso de la aproximación adiabática se usó en lugar de los lifts cerrados, los autovectores de $H(X_t)$ los cuales son más accesibles que $|\phi(t)\rangle$. De las ecuaciones anteriores, se puede ver, que para un periodo completo, esto es para una curva cerrada \mathcal{C} en $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, el ángulo de fase $\gamma(\tau)$ esta dado por:

$$\gamma(\tau) = \gamma(\mathcal{C}) = \oint i \langle \phi(t) | \frac{d}{dt} | \phi(t) \rangle dt = \oint i \langle \phi | d | \phi \rangle \quad (95)$$

Donde $|\phi(t)\rangle$ corresponde a algún lift cerrado de \mathcal{C} .

El ángulo de fase $\gamma(\tau)$ sólo depende de la curva cerrada \mathcal{C} . Por esta razón, es considerada como una propiedad *geométrica* de \mathcal{C} , y se llama *fase geométrica*.

Recordando del sección anterior, de la conexión de Mead-Berry, veamos ahora la última ecuación, que esa conexión es solo una particularización de:

$$\mathcal{A} = i \langle \phi | d | \phi \rangle \quad (96)$$

La cual es llamada la *conexión de una forma de Aharonov-Anandan*.

Finalmente, para un proceso cíclico, y aprovechando las propiedades que satisface $|\phi\rangle$, se llega a que:

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-i \int_0^\tau \langle \psi(t') | h(t') | \psi(t') \rangle dt'} e^{i\gamma(\mathcal{C})} |\psi(0)\rangle \quad (97)$$

Nótese que la fase de Berry, no sería más que la particularización de esta última expresión, para cuando el vector estado se somete a un aproximación adiabática.

Se nota algo peculiar, y es que al hacer el tratamiento, de la fase de Aharonov-Anandan, para el caso del qbit.

2.2 Fase de Aharonov-Anandan: Caso Degenerado

Ahora, se está interesado e estados cíclicos $W(0)$ que no sean estacionarios. Consideremos una evolución cíclica general del un estado \mathcal{N} -fold degenerado, correspondiente a una curva cerrada:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{N}} : [0, T] \ni t \rightarrow W(t) \in Gr_{\mathcal{N}} \quad (98)$$

Donde $W(t)$ satisface la ecuación de Liouville con alguna condición inicial $W(0)$. El estado $W(t) \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ puede representado como un \mathcal{N} -frame

$$s(W(t)) := (|\phi_1(W(t))\rangle, \dots, |\phi_{\mathcal{N}}(W(t))\rangle) \quad (99)$$

Donde $|\phi_a(W)\rangle$ forman una base ortonormal de vectores, con:

$$W = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} |\phi_j(W)\rangle \langle \phi_j(W)| \quad (100)$$

En general, la base de vectores $|\psi_a(W)\rangle$ y por consiguiente el frame $s(W) = (|\phi_1(W)\rangle, \dots, |\phi_{\mathcal{N}}(W)\rangle)$ puede ser definida suave solo sobre un subconjunto abierto U de $Gr_{\mathcal{N}}$.

La situación es parecida al del caso adiabático. Los frames s y la base de vectores $|\phi_j\rangle$ juegan el role de los frames s^n y la base de autovectores $n^j(X_t)$. Dígase que podemos elegir otro conjunto de bases ortonormales, tal que:

$$|\phi_j(W)\rangle' := \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} |\phi_b(W)\rangle \mathcal{U}^{kj}(W) \quad (101)$$

Donde nuevamente $\mathcal{U}^{jk}(W)$ son elementos de matriz, de una matriz unitaria $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Luego el frame $s'(W) = s(W) \cdot \mathcal{U}(W)$

Continuando con la analogía con lo hecho para el capítulo anterior, se verá la dinámica de un vector de estado inicial puro $|\psi(0)\rangle$ el cual estará sobre un subespacio degenerado correspondiente al estado inicial $W(0)$.

Para encontrar la solución exacta para la ecuación de Schrödinger, está dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} c_j |\phi_j(W(t))\rangle \quad (102)$$

Luego se obtiene la ecuación diferencial para los coeficientes $c_j(t)$

$$\frac{dc_k(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \left[i \langle \phi_j(W(t)) | H(t) | \phi_j(W(t)) \rangle + \langle \phi_j(W(t)) | \frac{d}{dt} | \phi_j(W(t)) \rangle \right] c_j(t) = 0 \quad (103)$$

sustituyendo esta ecuación en (102) se obtiene:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}} |\phi_k(W(0))\rangle \left[\overleftarrow{\mathcal{T}} \exp \int_0^t (-i\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\tau) d\tau + i\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(W(\tau))) \right]^{kj} c_j(0) \quad (104)$$

Aquí, \mathcal{E} y $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ son matrices hermiticas $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, definidas por los siguientes elementos de matriz:

$$[\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\tau)]^{jk} : = \langle \phi_j(W(\tau)) | H(\tau) | \phi_k(W(\tau)) \rangle \quad (105)$$

$$[\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(W(\tau))]^{ij} : = i \langle \phi_j(W(\tau)) | \frac{d}{d\tau} | \phi_k(W(\tau)) \rangle d\tau \quad (106)$$

Usando (104), se puede determinar la evolución del frame inicial $\psi(0) := s(0) = (|\phi_1(W(0))\rangle \cdots, |\phi_{\mathcal{N}}(W(0))\rangle)$, obtenido que:

$$\psi(t) = \psi(0) \cdot \left[\overleftarrow{\mathcal{T}} \exp \int_0^t (-i\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(\tau) d\tau + i\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(W(\tau))) \right] \quad (107)$$

Luego, para un ciclo completo, tenemos:

$$\psi(T) = \psi(0) \cdot \left[\overleftarrow{\mathcal{T}} \exp \int_0^T (-i\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(t) dt + i\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(W(t))) \right] \quad (108)$$

Una diferencia importante entre (108) y su contraparte adiabática (77), es que $\mathcal{E}_{\mathcal{N}(\tau)}$ y $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(W(\tau))$ en general no conmutan. Luego no es posible escribir la fase total $U(\mathcal{N})$ como el producto de la generalización de la fase dinámica:

$$U^{dinamico} = \overleftarrow{\mathcal{T}} \exp \int_0^T (-i\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(t) dt) \quad (109)$$

y la fase geométrica:

$$U^{geometrico} = \overleftarrow{T} \exp \int_0^T (i\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(W(t))) \quad (110)$$

Sin embargo, esta última cantidad puede ser escrita como una integral de ordenamiento de caminos:

$$U^{geometrico} = \overleftarrow{T} \exp \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}} (i\mathcal{A}_{\mathcal{N}}) \quad (111)$$

El cual es identificado como un elemento de holonomía de un fibrado $\eta_{\mathcal{N}}$.

Se debe enfatizar que la fase geométrica y dinámica, obtenidas en las últimas expresiones son definidas independientemente. Como se mencionó antes, su producto no nos da la fase total $U(N)$. Ellos fueron definidas directamente como generalizaciones de las fases geométricas y dinámicas de los casos no degenerados Sin embargo, la fase geométrica definida en 111 depende solo de la curva cerrada $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ y de la estructura del fibrado $\eta_{\mathcal{N}}$.

2.3 Fase de Pancharatnam

Ahora, pasamos a otro tipo de fase geométrica, esta es, la fase de Pancharatnam. A diferencia de los casos anteriores, este tipo de fase, trata de encontrar la fase relativa entre dos estados cualesquiera, sin necesidad de que uno de ellos parta de la evolución del otro.

Considérese un par de vectores estado $|\psi'\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle$ representando el mismo estado cuántico, esto es:

$$|\psi\rangle \langle\psi| = |\psi'\rangle \langle\psi'| \quad (112)$$

Es claro que la fase relativa entre $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ es α . Sin embargo, cuando $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ representan dos estados cuánticos diferentes, la definición de fase relativa no es tan obvia.

Aparentemente no se había prestado atención a este problema hasta que Pancharatnam [5] tomó cartas en el asunto, atacando la interpretación física de la fase relativa entre distintos estados de polarización de la luz.

Esto llevó a Pancharatnam, a encontrar que la fase relativa está sorprendentemente relacionado con la geometría del espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Tómese dos vectores estados no ortonormales $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$. Se llamará a la fase de su producto escalar como *fase relativa* o *diferencia de fase* entre $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{113}$$

Donde α_{12} es a diferencia de fase entre $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$.

Se dice que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ están en *fase* o *paralelo* si $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ es real y positivo. Claramente, $|\psi\rangle$ está en fase consigo mismo, y si $|\psi\rangle$ está en fase con $|\phi\rangle$, pues $|\phi\rangle$ está en fase con ψ . Sin embargo, no se puede aplicar la transitividad, esto es, si $|\psi_1\rangle$ está en fase con $|\psi_2\rangle$, y $|\psi_2\rangle$ está en fase con $|\psi_3\rangle$, luego $|\psi_3\rangle$ no está necesariamente en fase con $|\psi_1\rangle$. Para visualizar esto, veamos el siguiente ejemplo:

Consideremos los tres vectores normalizados:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{114}$$

Claramente:

- $|\psi_1\rangle$ está en fase con $|\psi_2\rangle$, debido a que $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}$.
- $|\psi_2\rangle$ está en fase con $|\psi_3\rangle$, debido a que $\langle\psi_2|\psi_3\rangle = 1/\sqrt{2}$.
- $|\psi_1\rangle$ no está en fase con $|\psi_3\rangle$, debido a que $\langle\psi_1|\psi_3\rangle = -i/\sqrt{2}$ no es real.

Se suele llamar a las reglas expuestas arriba como la *conexión de Pancharatnam*.

Consideremos ahora, dos vectores de estado $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle \in S(\mathcal{H})$ y sea α la fase relativa entre ellos. Denotemos por $p_0, p_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ las correspondientes proyecciones, i.e $p_0 = \pi(\psi_0)$ y $p_1 = \pi(\psi_1)$. Veamos el carácter geométrico de α .

Sea γ la geodésica más corta que conecta p_0 y p_1 . Y además sea $\tilde{\gamma}$ un lift arbitrario de γ que conecta a $|\psi_0\rangle$ con $|\psi_1\rangle$, además sea \mathcal{A} un conexión de uno-forma en $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, tenemos que:

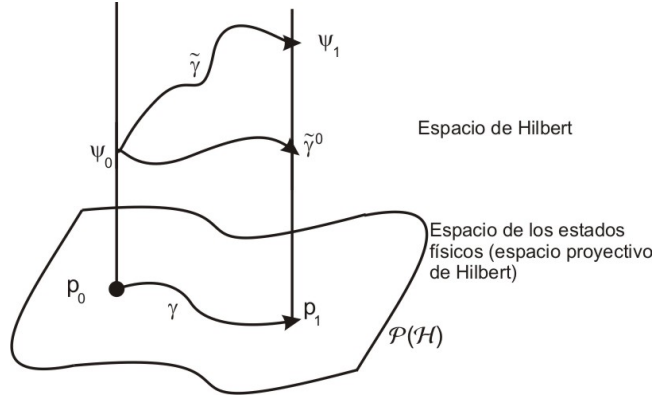


Figure 2: Lifts of γ passing through $|\psi_0\rangle$: $\tilde{\gamma}^0$ - un lift horizontal, y $\tilde{\gamma}$ - un lift arbitrario conectando $|\psi_0\rangle$ con $|\psi_1\rangle$

$$\int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{A} = \int_{\gamma} \mathcal{A} \quad (115)$$

Denotemos por $\tilde{\gamma}^0$ al lift horizontal⁵ de γ pasando a través de ψ_0 (véase fig. 2). Así tenemos que:

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \ni t \rightarrow |\psi(t)\rangle \quad (116)$$

y

$$\tilde{\gamma}^0 : [0, 1] \ni t \rightarrow |\phi(t)\rangle \quad (117)$$

Claramente, ambos lifts están relacionados por un factor de fase independiente del tiempo:

$$|\phi(t)\rangle = e^{if(t)} |\psi(t)\rangle \quad (118)$$

Con la condición de que $f(0) = 0$. Ahora, de la definición de la conexión de uno-forma, tenemos que:

$$\mathcal{A}^0 = \langle \phi | d | \phi \rangle = \mathcal{A} - df \quad (119)$$

⁵Horizontal lift, se refiere al lift de Aharonov-Anandan, tal como se definió en comienzo de esta sección

Y luego:

$$\int_{\gamma} \mathcal{A} = \int_{\gamma} (A^0 + df) = f(1) \quad (120)$$

Debido a que la integral \mathcal{A}^0 se anula. Finalmente, la fase relativa entre $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$ es hallada por:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \frac{\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle}{|\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle|} \\ &= \frac{\langle \phi(0) | e^{-if(1)} \phi(1) \rangle}{|\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle|} \\ &= e^{-if(1)} \end{aligned} \quad (121)$$

Debido a que $\phi(0)$ y $\phi(1)$ están en fase. Luego, se puede concluir que:

$$\alpha = - \int_{\gamma} \mathcal{A} \quad (122)$$

y como consecuencia:

$$\alpha = - \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{A} \quad (123)$$

Lo interesante de este resultado, es que la fase relativa entre dos estados cualesquiera, de un sistema cuántico, se relaciona de un forma sorprendente con la estructura del espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Pero nótese que se asumió que uno no evoluciona a partir del otro, esto trae como consecuencia que ninguna de los dos estados, tenga adherida a sí misma, algún factor adicional dinámica.

Esa expresión es la más general, para la fase de Pancharatnam. Pero cuando Pancharatnam publicó sus estudios, el trabajo sobre estados de polarización, en la que uno de ellos evolucionaba a partir del otro, en un proceso cíclico, y al encontrar la fase relativa, entre ellos, se dio con la sorpresa de que tal fase dependía directamente de la estructura del espacio proyectivo, aún cuando el trabajo de Berry aún no se daba, si embargo él ya se había dado cuenta de este detalle, y por eso, le acuñó el término de fase geométrica, y bueno con el tiempo se conservó por su trabajo

pionero⁶.

Veamos, la aplicación inmediata de este resultado, y vemos el caso para una evolución cíclica. Asumamos una secuencia de proyecciones, que llevan al vector estado $|\psi_1\rangle$ a sí mismo, luego de la proyecciones sobre los vectores estado $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ y finalmente a ψ_1 [6]. El vector resultante final ψ_{final} diferirá del inicial por un factor de fase:

$$\psi_{final} = e^{i\varphi} \psi_1 \quad (124)$$

La fase relativa φ es fácil de computar, de la siguiente manera:

$$e^{i\phi} = \langle \psi_1 | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \psi_{n-1} \rangle \cdots \langle \psi_3 | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \quad (125)$$

Recordando, la definición del operador proyector, tenemos que:

$$e^{i\varphi} = \text{tr} \left(\hat{P}_n \cdot \hat{P}_{n-1} \cdots \hat{P}_2 \hat{P}_1 \right) \quad (126)$$

De aquí que φ corresponde a un cantidad cuántica geométrica definido enteramente sobre $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, sin referencia al espacio original de Hilbert \mathcal{H} . Esta fase de Pancharatnam, tiene una interpretación geométrica bastante simpática. Denotemos por $\gamma_{k+1,k}$ a la geodésica que conecta \hat{P}_k con \hat{P}_{k+1} , y se define la curva cerrada.

$$C := \gamma_{1,n} * \gamma_{n,n-1} * \cdots * \gamma_{3,2} * \gamma_{2,1} \quad (127)$$

Debido a resultado obtenido en (123), se tiene que:

$$\varphi = - \oint_C \mathcal{A} = - \int_{\Sigma} F \quad (128)$$

Con $F = dA$ es una curva de dos-forma sobre $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ y Σ una región bidimensional tal que $\partial \Sigma = C$

2.4 Ilustrando Conceptos I: El Qbit

Hasta el momento, hemos sido muy abstractos en cuanto al tratamiento empleado, pues bien, en esta sección, ya entraremos en algo más concreto,

⁶aunque Pancharatnam, no logro generalizar sus resultados, a un sistema cuántico cualquiera

nos centraremos al caso del *qbit*, el cual es un concepto muy arraigado con la información cuántica⁷. Y además, estos resultados obtenidos, se pueden particularizar, para cuando lleguemos al estudio de la luz, debido a que los estados de polarización de la luz, pueden verse como una especie de qbits.

Una definición bastante compacta de los qbits es que: *es cualquier sistema cuántico de dos niveles*. Si queremos ir un poco más allá, se puede decir que un qbit es la unidad mínima y por lo tanto constitutiva de la información cuántica[7].

Matemáticamente, un *qbit*, puede representarse como:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |0\rangle + \beta(t) |1\rangle \quad (129)$$

Donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forman una base ortonormal, y α, β son números complejos y cumplen con $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$

Ejemplos clásicos de los qbits, son el spin *up* y *down*, y los estados de polarización de la luz *circular derecha* y *circular izquierda*.

Para tratar los qbits, y por motivos de simplicidad en la notación, asumiremos que la base de los qbits son $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$, los cuales cumplen con:

$$H_0 |\varphi_i\rangle = E_i |\varphi_i\rangle \quad (130)$$

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (131)$$

A H_0 le añadimos una perturbación W ⁸ de modo que el hamiltoniano nuevo es:

$$H = H_0 + W \quad (132)$$

Como ahora, estamos trabajando con un nuevo Hamiltoniano, pues deberemos resolver una nueva ecuación de autovalores:

$$H |\psi_{\pm}\rangle = E_{\pm} |\psi_{\pm}\rangle \quad (133)$$

La representación matricial de W en la base de $\{|\varphi_i\rangle\}$ es:

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \quad (134)$$

⁷aquí no abordaremos mucho sobre definiciones, dejamos esta parte para el final cuando toquemos las implicancias de las fases geométricas en la computación cuántica

⁸no se confunda, este es un método exacto, que nada tiene que ver con teoría de perturbaciones, esto es solo un artificio

Donde, $W_{11}, W_{22} \in \mathfrak{R}$ y además que $W_{12} = W_{21}^*$ ⁹. Sin acoplamiento, los autovalores son E_1 y E_2 . Con acoplamiento, los autovalores son E_+ y E_- .

Lo curioso de este acoplamiento, es que si $|\psi(0)\rangle = |\varphi_1\rangle$, la probabilidad de encontrar al sistema en un tiempo $t > 0$ en el estado $|\varphi_2\rangle$ es diferente de cero.

El hamiltoniano obtenido es:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 + W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & E_2 + W_{22} \end{pmatrix} \quad (135)$$

Al cual diagonalizando se obtiene:

$$H = \begin{pmatrix} E_+ & 0 \\ 0 & E_- \end{pmatrix} \quad (136)$$

Donde:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2} \quad (137)$$

Luego, los autovectores obtenido son:

$$|\psi_+\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}}|\varphi_1\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}}|\varphi_2\rangle \quad (138)$$

$$|\psi_-\rangle = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}}|\varphi_1\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\varphi}{2}}|\varphi_2\rangle \quad (139)$$

Donde:

$$tg\theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}}; 0 \leq \theta \leq \pi \quad (140)$$

$$W_{21} = |W_{21}|e^{i\varphi} \quad (141)$$

Sólo por motivos de visualización, asumiremos que $W_{11} = W_{22} = 0$, si es que usted no se convence, pues puede hacer el cambio de variable $E_{1,2} = E_{1,2} + W_{11,22}$ y los resultados obtenidos con la primera suposición serán los mismos. Ahora, definiendo $\Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$ y $E_m = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$. Obteniedo la expresión:

$$E_{\pm} = E_m \pm \sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2} \quad (142)$$

Al graficar, este resultado se reproduce la gráfica 3.

⁹esto, para que los observables medidos sean cantidades reales

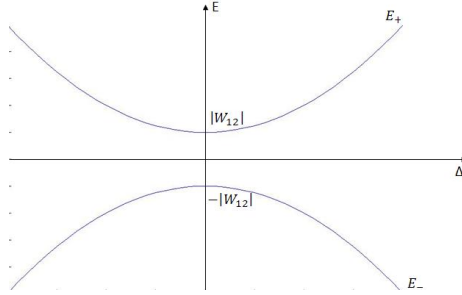


Figure 3: Con el acoplamiento, se anula el crossing

Este es un resultado importante, ya que de acuerdo a nuestros análisis previos, pues para que los resultados teóricamente predichos sean válidos, se necesitaba la condición de que no halla crossing, pues bien, de acuerdo a nuestras imposiciones, de exigir que W cumpla con ciertos requisitos, para que el hamiltoniano sea hermítico, pues, logramos anular el crossing¹⁰.

Así, demostramos, que para cualquier sistema, que evoluciona bajo un hamiltoniano de la forma (135), y además es hermítico, podemos representar los qbits, de la forma (139). Y en general, los resultados obtenidos en el resto de esta sección, también se basan en estas imposiciones.

Se hace esta aclaración, porque hay ciertos estudios en donde se trabajan con hamiltonianos, no hermíticos, esto, para simular la interacción con el ambiente (disipación). Para casos como estos, el efecto crossing tiene gran importancia, ya que con esa clase de hamiltonianos, no solo se degenera los niveles de energía, sino también los mismos estados, en donde el sistema colapsa al llegar a esos puntos donde hay entrecruzamiento (crossing), en fin hay técnicas para poder extraer la información a pesar de este colapso, una de ella es el entrelazamiento de estados, pero no entraremos mas en detalle, porque escapa del objetivo de este trabajo.

2.5 Ilustrando Conceptos II: La Esfera de Bloch

La esfera de Bloch, juega un rol muy importante dentro de la descripción de sistemas de dos niveles (qbit), debido a que su estudio hace posible la

¹⁰para $W=0$, pues los niveles se cruzaban, debido a que forman dos rectas cruzadas

inclusión de algoritmos cuánticos, ya que permite una analogía de los bits clásicos con los bits cuánticos, aunque incluye un fenómeno propio de la mecánica cuántica, esto es, que un qbit, no tiene necesariamente un valor definido antes de ser medido, esto abre un sin fin de puertas, a una nueva era en la computación, ya que es este principio el que hará posible (como veremos más adelante) que, los posibles computadores cuánticos, puedan desarrollar cálculos cientos de millones de veces más rápidos que las más modernas computadoras de hoy en día.

Pero dentro del estudio enmarcado sobre la esfera de Bloch, se encuentran las fases geométricas, debido a la increíble simplicidad y belleza a la que se pueden reducir todos los tratamientos topológicos, tratados en secciones previas. Esto no es de sorprender, puesto que los físicos siempre buscaron formas simples y bellas de explicar los fenómenos (bueno, aquí se pasa por alto, los estudios del caos, en donde la simplicidad y belleza pierden sentido [8]).

En la sección anterior se vio, la formulación de los qbits, que no son otra cosa que un sistema cuántico de dos niveles, partamos de lo mismo, y digamos que dada la base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ¹¹. Podemos expresar las matrices de pauli, en función de estas bases, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\ \sigma_y &= -i(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|) \\ \sigma_z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\end{aligned}$$

Debido a que las matrices de Pauli¹² forman un grupo, entonces cualquier operador \mathbf{A} , puede escribirse como una combinación lineal de los mismos, de acuerdo a:

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{1} + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z \quad (143)$$

En donde los coeficientes, están dados por:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(A) \\ a_i &= \frac{1}{2} \text{Tr}(A \sigma_i); i = x, y, z\end{aligned}$$

¹¹los cuales nos servirán de base para los qbits

¹²incluyendo la matriz identidad, que es considerada como σ_0

Ahora, supongamos que haremos lo expuesto anteriormente, pero para el caso del operador densidad, en este caso el operador densidad tendrá dimensión dos. Luego el operador densidad puede ser escrito como:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \quad (144)$$

Donde:

$$r_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i); i = 1, 2, 3 \quad (145)$$

Por las propiedades de las matrices de Pauli:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i \xi_{ijk} \sigma_k \quad (146)$$

$$\text{tr}(\sigma_i) = 0 \quad (147)$$

Donde el término ξ es el símbolo de levicivita. Se puede obtener fácilmente que:

$$\text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}(1 + |\vec{r}|^2) \quad (148)$$

Ahora, tomamos el caso, para cuando el sistema es *puro*, esto que la matriz densidad solo contenga un único posible estado. Bajo esta condición, se cumple que $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$, luego, usando esta condición en (148) tenemos que se debe cumplir que:

$$|\vec{r}|^2 = 1 \rightarrow |\vec{r}| = 1 \quad (149)$$

Es decir, para un sistema de dos niveles puro, el operador densidad toma un forma muy simple, en función de las matrices de Pauli, y del vector \vec{r} . De acuerdo a las condiciones establecidas, se pudo encontrar que el vector \vec{r} es un vector unitario, y como tal puede ser representado como un punto sobre una esfera de radio 1. A esta esfera, se le conoce como *esfera de Bloch*, si trabajamos con spinores o *esfera de Poincaré* si trabajamos con estados de polarización de la luz, aunque ambas esferas son la misma, sólo cambian de nombre por motivos de historia. Así que haremos el tratamiento general, para cualquier sistema de dos niveles, pero por convención la llamaremos esfera de Bloch, más adelante cuando tratemos el caso específico de la luz, la llamaremos esfera de Poincaré.

Ahora, empleemos estos resultados aplicados al qbit. En la sección anterior, se demostró que todo sistema de dos niveles, puede ser expresado

de la forma:

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i\varphi}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{\frac{i\varphi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

Para llevarlo a la forma (144), se usan las relaciones dadas en (145). En fin, este es un cálculo sencillo, en el que se puede llegar a los siguientes resultados:

$$r_x = \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$r_y = \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$r_z = \cos(\theta)$$

Se hace notoria, que los resultados anteriores, para \vec{r} se asemejan bastante a la de las coordenadas esféricas. Nótese ahora que cada punto sobre la esfera unitaria, determinará un estado (puro), véase fig 4:

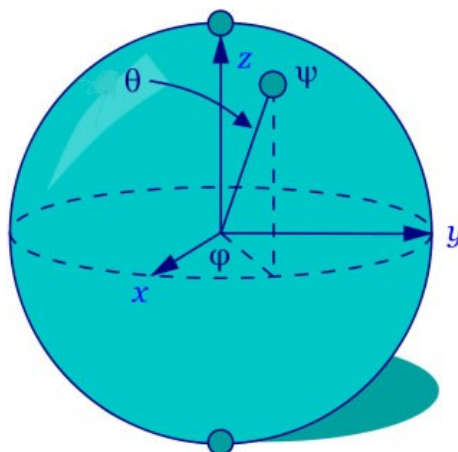


Figure 4: Esfera de Bloch - para el estado puro

Hay que recalcar que esta esfera es válida sólo para estados puros. Ahora, nótese que en el polo norte, de nuestra esfera, se encontrará el estado $|0\rangle$ y en el polo sur, el estado $|1\rangle$. Se mantiene la analogía de los 0 y 1 de los bits clásicos, pero un qbit, como lo muestra la esfera de bloch, puede estar en una superposición del estado $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

Ahora empleemos, lo que se mencionó antes. Ya que podemos asociar

la esfera de Bloch con el espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ ¹³, así para definir una evolución cíclica, pues asociamos a nuestra variedad, un fibrado tangente, tal que, de acuerdo a los resultados previos, estos se transporten paralelamente¹⁴ a través de la variedad [9]. De manera ilustrativa (véase la figura (5)), elegimos dos vectores que siempre permanecen tangentes a la esfera. Supongamos que la evolución del sistema, sea tal que se comienza desde el estado $|0\rangle$, esto es en el polo norte, y es transportado a lo largo de una curva, y tales vectores siempre apunta a la misma dirección (localmente) digamos al sur y al este, todo el tiempo. Luego de completar un ciclo completo (pasar con una curva cerrada), los vectores vuelven a su punto inicial, pero estos se encuentran rotados respecto del vector inicial. Nótese que los vectores “rotados”, han sido cuidadosamente guiados tal que se mantengan paralelos durante todo el recorrido. Se nota, que mientras más “pequeña” es el camino recorrido, pues más pequeño es el ángulo de rotación.

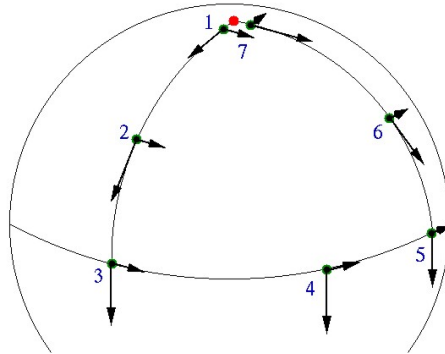


Figure 5: Transporte paralelo - evolución adiabática

Como ya vimos antes, la razón por la que ocurre esta rotación, es puramente geométrica. De hecho, esto está conectado con la curvatura intrínseca de la esfera, para ver esto, nótese que este fenómeno no parecería si los vectores fuesen transportados paralelamente a lo largo de una variedad plana, tal como un plano o un cilindro [10]. El ángulo de rotación

¹³para el caso adiabático, pues ser tomado como el espacio de parámetros \mathbf{M}

¹⁴esto es consecuencia de asociar una holonomía al fibrado tangente

está, de hecho, relacionada con la integral de la curvatura sobre la superficie rodeada por el camino cerrado.

Y listo, ese ángulo de rotación es la fase geométrica de Berry.

Como mencionamos, para el qbits, en el caso adiabático, toda nuestra descripción se simplifica bastante. Para las fases más generales, no existe una interpretación como la dada en la fase de Berry.

En trabajos ya realizados, se hacen el tratamiento de forma muy elegante, para el caso del spín *up* y *down*, ese es el ejemplo clásico, incluso este asunto está muy bien detallado en la tesis [11].

Pero, en este trabajo se partió de un hamiltoniano general, para cualquier sistema de dos niveles, generalizando así los resultados obtenidos para caso particular del spín¹⁵.

Realizando los cálculos para la fase geométrica, para el caso del qbit, en una evolución cíclica. Obtenemos, usando los resultados obtenidos anteriormente para los diferentes tipos de fases geométricas, que:

- ***Fase de Berry***

$$Fase\ de\ Berry = \frac{1}{2}\Omega(\mathcal{C}) \quad (150)$$

- ***Fase de Aharonov-Anandan***

$$Fase\ de\ Aharonov - Anandan = \frac{1}{2}\Omega(\mathcal{C}) \quad (151)$$

- ***Fase de Pancharatnam***

$$Fase\ de\ Pancharatnam = -\frac{1}{2}\Omega(\mathcal{C}) \quad (152)$$

Con esto, notamos que para el caso del Qbit, la fase de Berry coincide con la de Aharonov-Anandan, la cual es más general, aunque debe entenderse que la fase de Berry, asume que el vector estado, siempre permanecerá sobre el mismo parche del espacio de parámetros (que en este caso es el espacio proyectivo), mientras que la de Aharonov-Anandan, es para cualquier tipo de evolución cíclica. Además debe notarse que la fase de Pancharatnam, difiere en signo con la de Aharonov-Anandan, esto

¹⁵para este caso, el hamiltoniano se relaciona con el campo magnético

implica que la fase geométrica de Pancharatnam será positiva (negativa) para circuitos trazados positivamente (negativamente), mientras que la de Aharonov-Anandan es al revés¹⁶.

Con este resultado culminamos el tratamiento general de las fases geométricas, en donde mostramos, que para el caso del qbit, para cualquier hamiltoniano que cumpla que sea hermítico, puede escribirse de la forma (139), y esto hace que la fase geométrica, para un ciclo completo, sea, en general, la mitad del ángulo sólido del camino trazado sobre la esfera de Bloch.

3 Conclusiones

1. Se ha estudiado los métodos generales para calcular las fases geométricas, en todas sus variedades, estos es, la fase de Berry, la fase Aharonov Anandan, la fase de Pancharatnam. Así mismo se logró visualizar la fase geométrica, para el caso general del qbits, teniendo una interpretación del transporte paralelo para el caso de la fase de Berry.
2. Se observó las propiedad topológicas de estas fáses, notando un comportamiento bastante sencillo para el caso del qbit.

Bibliografía

- [1] A. Bohm A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu and J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems* (Springer 2003)
- [2] Dariusz Cruscinski and Andrzej Jamiolkoski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, (Birkhäuser, 2004)
- [3] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **392**, 45-57 (1984)
- [4] Y. Aharnov and J. Anandan, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1987)
- [5] S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci.* **A44**, 247 (1956)

¹⁶Tomando positivo, en el sentido contrario a las agujas del reloj

- [6] M. V. Berry and S. Klain, *J. Mod. Opt.* **43**, 165 (1996)
- [7] Qubit, Wikipedia La Enciclopedia Libre, visto a enero del 2009 en:
<http://es.wikipedia.org/wiki/Cubit>
- [8] Valentin Afraimovich and Zse-Bi Hsu, *Lectures on Chaotic Dynamical Systems* (International Press, American Mathematical Society 2003)
- [9] B. Goss Levi, *Phys. Today* **46**, 17 (1993)
- [10] Berry's Phase: a review, visto a enero del 2009 en:
<http://www.mi.infm.it/manini/berryphase.html>
- [11] J. Gutierrez. 2005. *Fases Geométricas Cuánticas*. Tesis de Lic. Físico. Univ. Nacional Mayor de San Marcos. Fac. de Ciencias. 53p.